

83-118 מתמטיקה בדידה 2

מבחן לדוגמא

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מתוך 5.
יש לנמק את התשובות.
משך המבחן: שעה וחצי.
חומר עזר: מחשבון בלבד.

1. בכמה אופנים ניתן לחלק 3 פרסים **שונים** בין n תלמידים אם:

(א) אף תלמיד אינו יכול לקבל יותר מפרס אחד.

(ב) ניתן לקבל יותר מפרס אחד.

(ג) כל פרס ניתן ל-2 תלמידים (שונים), ואף תלמיד לא מקבל יותר מפרס אחד.

(ד) כל פרס ניתן ל-2 תלמידים (שונים), וניתן לקבל יותר מפרס אחד.

2. במכונה מסוימת ניתן להדפיס מילים ע"י שימוש ברצפים: "אב", "גד", "ה", "ו" בלבד.
אורך מילה מוגדר להיות מספר האותיות המעורבות בה.
למשל: המילה "אבאבה" היא מאורך 5. את המילה "אג" אי אפשר ליצור במכונה.

(א) מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר המילים מאורך n שניתן להדפיס במכונה.

(ב) פתרו את נוסחת הנסיגה (כלומר מצאו נוסחה סגורה).

3. הוכיחו בעזרת נימוק קומבינטורי כי

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

(נימוק אלגברי יזכה רק ב-6 נקודות).

4. כמה מהשלמים $1, 2, 3, \dots, 6000$ ניתנים לחלוקה (ללא שארית) על ידי לפחות אחד מהמספרים 2, 5, 7?

5. יהי $G = (V, E)$ גרף סופי 3-רגולרי.

(א) הוכיחו כי $|V|$ הוא מספר זוגי.

(ב) כמה צלעות יש ל- G אם $|V| = n$?

- (ג) האם הגרף בהכרח קשיר? (הוכיחו או ציירו דוגמא נגדית).
- (ד) האם יתכן ש G הוא עץ? (ציירו דוגמא או נמקו למה לא יתכן).

בהצלחה!

