תרגילי חזרה לבוחן־ אינפי 1

25 בדצמבר 2016

שאלה 1

מצאו האם הגבול הבא קיים (במובן הרחב) אם הוא אכן קיים, מצאו אותו:

$lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}\right)\cdots\left(\sqrt{3}-\sqrt[n]{3}\right)$

פתרון:

$\forall n:\ \sqrt[n+1]{3}>1$ ולכן הסדרה היא מונוטונית יורדת שכן $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{3}-\sqrt[n+1]{3}<\sqrt{4}-1=2-1=1$. מדובר בסדרה חיובית ולכן היא חסומה מלרע ע"י אפס ומכאן $\exists lim_{n\to\infty}a_n=L$.

נציב את הסדרה ע"י נוסחת הנסיגה בצורה הבאה: $a_{n+1}=a_n\left(\sqrt{3}-\sqrt[n+1]{3}\right)$ ולכן מאריתמטקה של סדרות נקבל $L=lim_{n\to\infty}a_n\cdot lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\sqrt[n+1]{3}\right)=L\left(\sqrt{3}-1\right)$ ולכן הגבול הוא אפס.

שאלה 2

נתונה סדרה שמוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$, $a_1=c$ ו־$c>0$.

א) עבור איזה ערך של c a_n היא סדרה מונוטונית יורדת.

ב) עבור איזה ערך של c a_n היא סדרה מונוטונית עולה.

ג) הוכח ש־a_n היא סדרה מתכנסת וחשב את גבולה

פתרון:

נחלק את הפתרון למקרים:

מקרה א: $c>1$

נראה באינדוקציה שבמקרה הזה a_n היא סדרה מונוטונית יורדת:

עבור $n=1$ נקבל: $a_2=\sqrt{a_1}=\sqrt{c}<c=a_n$

נניח את נכונות הטענה עבור n, כלומר נניח ש־$a_{n+1}<a_n$

ונוכיח עבור $n+1$, כלומר רוצים להוכיח ש־$a_{n+2} < a_{n+1}$:

הוכחה: $a_{n+2} < a_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{a_n} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$ כי a_n היא סדרה של מספרים חיוביים, אבל זה נכון לפי נחת האינדוקציה.

מקרה ב: $0 < c < 1$

הוכחה דומה ל־א' .

ולכן סדרה היא מונוטונית עולה כאשר $c > 1$ ומונוטונית יורדת כאשר $0 < c < 1$.

נוכיח חסימות עבור מקרה א':

עבור $n = 1$ נקבל ש־$a_1 > 1$

נניח נכונות עבור nכלומר נניח ש־$a_n > 1$

נוכיח עבור $n+1$, כלומר צ"ל $a_{n+1} > 1$

הוכחה: $a_{n+1} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{a_n} > 1 \Leftrightarrow a_n > 1$ אבל זה נכון לפי הנחת האינדוקציה.

הוכחה של חסומות למקרה ב' דומה

נמצא את הגבול עבור מקרה א':

$L = lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} a_{n+1} = lim\sqrt{a_n} = \sqrt{L}$. נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל שהגבול הוא 0 או 1, אבל את 0 אנחנו פוסלים כי הסדרה שלנו חסומה מלרע ע"י 1 .

חישוב גבול עבור מקרה ב' דומה.

שאלה 3

חשב את גבול הסדרה הבאה: $2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, ...$

שאלה 4

ענו על סעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א) תהי סדרה a_n כך ש־$a_n \to 2$ ולכל n, $a_{n+1} \neq a_n$. חשב את $lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{a_{n+1}-a_n}}$.

פתרון:

נשתמש בטענה שראיתם בתרגיל בית: אם $lim a_n = 1$ אז $lim\,(a_n)^{b_n} = e^{lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}$.

ולכן $lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{a_{n+1}-a_n}} = e^{lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\frac{1}{a_{n+1}-a_n}} = e^{lim\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)\frac{1}{a_{n+1}-a_n}} = e^{lim\left(\frac{1}{a_n}\right)} = e^{\frac{1}{2}}$

ב) תהי a_n סדרה עבורה $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$. הוכיחו: $a_n \to 0$.

פתרון:

$\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{a_n-1+1}{a_n+1} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}$.

ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות מקבלים: $0 = lim\left(1-\frac{1}{a_n+1}\right) \Leftarrow= lim1+lim\frac{1}{a_n+1}$

$0 \Leftarrow 1 = lim\frac{1}{a_n+1} \Leftarrow 1 = \frac{lim1}{lim(a_n+1)} \Leftarrow 1 = lim\,(a_n+1)$ ולכן $1 = lima_n + lim1$ ומה

שגורר ש־$lima_n = 0$.

ג) תהיינה a_n, b_n שתי סדרות כך ש־$a_n \cdot b_n \to 0$. הוכח או הפרך: $a_n \to 0$ או $b_n \to 0$.

פתרון:

הפרכה: נבחר $a_n = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ 0 & n = 2k-1 \end{cases}$ ו־ $b_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 1 & n = 2k-1 \end{cases}$. ברור ש־ $a_n \cdot b_n = 0 \to 0$ אבל שתיהן לא מתכנסות לאפס.

שאלה 5

ענה על הסעיפים הבאים: (אין קשר בין הסעיפים)

א) הוכח או הפרך: $limb_n = 0$ אזי $lim\frac{b_{n+1}}{b_n} = 0$.

פתרון:

נפריך: $b_n = \frac{1}{2^n} \to 0$ אבל $lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = lim\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$.

ב) תהי a_n סדרה ממשית מתכסת לגבול ממשי L ותהי b_n סדרה חסומה שלא מתכנסת.

אזי $a_n \cdot b_n$ מתכנסת אמ"ם $L = 0$.

כיוון $\Leftarrow$: נניח ש־$a_n \cdot b_n$ מתכנסת ונוכיח ש־$L = 0$: $lima_n \cdot b_n = L \cdot limb_n = K$

אזי אם $L \neq 0$ אזי קבל לפי אריתמטיקה של גבולות $limb_n = \frac{K}{L}$ ולכן קבלו ש־b_n מתכנסת

בסתירה לנתון. ולכן $L = 0$.

כיוון $\Rightarrow$: מיידי לפי אריתמטיקה של גבולות.

שאלה 6

חשב את הגבולות הבאים:

א) $lim\left(\frac{n^2+5}{3n^2+1}\right)^n$

פתרון:

$lim\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3n^2+15}{3n^2+1}\right)^n = lim\frac{1}{3^n}\left(\frac{3n^2+1+14}{3n^2+1}\right)^n = lim\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{14}{3n^2+1}\right)^n = lim\frac{1}{3^n}\cdot$

$$\left(1+\frac{1}{\frac{3n^2+1}{14}}\right)^{n\cdot\frac{3n^2+1}{14}\cdot\frac{14}{3n^2+1}} = lim\frac{1}{3^n}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n^2+1}{14}}\right)^{\frac{3n^2+1}{14}}\right)^{\frac{14n^2}{3n^2+1}} = e^{\frac{14}{3}}\cdot lim\frac{1}{3^n} = 0$$

ב) $lim\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

פתרון:

$$lim\left(\frac{n^2-2+3}{n^2-2}\right)^{n^2} = lim\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2}{3}}\right)^{n^2-2+2} = lim\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2}{3}}\right)^{\frac{n^2-2}{3}\cdot 3}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2}{3}}\right)^2 = e^3$$

ג) $lim\left(\frac{n^2+2n-1}{2n^2-3n-2}\right)^n$

פתרון:

$$lim\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2n^2+4n-2}{2n^2-3n-2}\right)^n = lim\frac{1}{2^n}\cdot\left(1-\frac{7n}{2n^2-3n-2}\right)^n = lim\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{\frac{2n^2-3n-2}{7n}}\right)^{n\cdot\frac{2n^2-3n-2}{7n}\cdot\frac{7n}{2n^2-3n-2}} = e^{\frac{7}{2}}\cdot lim\frac{1}{2^n} = 0$$