בוחן אלגברה לינארית למדעי המחשב

2.5.2016 , כ"ד ניסן תשע"ו

מתרגלים: עדי בן צבי, אחיה בר־און, תמר נחשוני.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- **כיתבו ת.ז. ואת שמכם המלא באופן ברור.**
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 115 נק'.

נתוני הבחינה:

- 4 שאלות, רובם עם סעיפים.
- הבוחן דורש יותר חשיבה ופחות כתיבה
- חומר שכדאי לדעת לקראת הבוחן: דטרמיננטות, משפט המימדים, ה"ל, משפט הדרגה, משפט ההגדרה, מטריצה מייצגת, מטריצת מעבר. נושאים אלו, שימושיהם ונספחיהם.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
4	
total	

בהצלחה!

.1

(א) (15 נק') נגדיר מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך

$$A=\begin{pmatrix}1&10&3\\-12&18&4\\-2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&4\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\-4&2&0\\2&2&1\end{pmatrix}$$

חשב את הדטרמיננטה של A
פתרון: מכפליות הדט' נקבל כי

$$|A|=\left|\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&4\\0&1&1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}3&0&0\\-4&2&0\\2&2&1\end{pmatrix}\right|=1\cdot\left|\begin{pmatrix}5&4\\1&1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}3&0&0\\-4&2&0\\2&2&1\end{pmatrix}\right|=1\cdot(5-4)\,(3\cdot 2\cdot 1)=6$$

(ב) (5 נק') ענה נכון/לא נכון (ללא נימוק) האם לכל שתי מטריצות $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מתקיים כי

$$det(A+B)=det(A)+det(B)$$

פתרון: לא נכון

.2

(א) (25 נק') תהא $T:V\to V$ ה"ל המקיימת $\ker T=\ker T^2$. הוכח כי

$$\ker T\oplus Im(T)=V$$

שימו לב שצריך להוכיח שני דברים:
.1 $\ker T+Im(T)=V$ .2 $\ker T\cap Im(T)=\{0\}$..
פתרון: צריך להוכיח שני דברים: .1 $\ker T+Im(T)=V$ .2 $\ker T\cap Im(T)=\{0\}$.
נתחיל ב2. יהא $w\in\ker T\cap Im(T)$. צ"ל כי $w=0$. אכן מהגדרת החיתוך נובע כי $Tw=0\wedge\exists v:Tv=w$ כעת נחבר את שני העובדות ונקבל

$$T^2v=T(Tv)=Tw=0$$

ולכן $v\in\ker T^2$ מהנתון נובע כי $v\in\ker T$ כלומר $w=Tv=0$ וסימנו.
.1 כעת, ממשפט המימדים ומשפט הדרגה נקבל כי

$$\dim\left(\ker T+Im(T)\right)=\dim\ker T+\dim Im(T)-\dim\left(\ker T\cap Im(T)\right)=\dim\ker T+\dim Im(T)-0=\dim V$$

ולכן קיבלנו כי $\ker T+Im(T)\le V$ מאותו מימד ולכן שווים.

(ב) (20 נק') הוכח או הפרך את הטענה הבאה (עם נימוק):
תהא $T:V\to V$ ה"ל חח"ע אזי בהכרח

$$\ker T=\ker T^2$$

פתרון: נכון. הוכחה T חח"ע גורר כי T^2 חח"ע כהרכבה של שתי פונקציות חח"ע. לכל ה"ל חח"ע מתקיים כי הגרעין שלה טריואלי בפרט אצלנו

$$\ker T = \{0\} = \ker T^2$$

3. (20 נק') לכל $a \in \mathbb{R}$ נגדיר ה"ל $T_a : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ע"י משפט ההגדרה

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 + 2x + x^2 \\ x &\mapsto ax + 2x^2 \\ x^2 &\mapsto -3 - x + ax^2 \end{aligned}$$

עבור אלו a מתקיים כי T_a **אינה** הפיכה?

פתרון: צריך לבדוק עבור אלו a מתקיים כי T_a אינה הפיכה. נעשה זאת ע"י המטריצה המייצגת בבסיס הסטנטרטי

$$[T_a]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

נבדוק מתי הדטר' שווה אפס:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & a & 5 \\ 0 & 2 & a+3 \end{pmatrix} \right| = a(a+3) - 10 = a^2 + 3a - 10 = (a+5)(a-2)$$

ולכן התשובה הסופית היא $a = -5$ או $a = 2$

4. תהא $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ה"ל המקיימת $T^2 = 0$.

נסמן
$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
בסיס ל $\mathbb{R}^4$. נסמן $A = [T]_B^B$

(א) (15 נק') נתון שאחת מהמטריצות הבאות היא A.

i. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

.iii $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

מצא את A (נמק) [כלומר ציין מי מהשלוש היא A + נימוק]

פתרון: מתקיים

$$A^2 = \left([T]_B^B\right)^2 = \left[T^2\right]_B^B = [0]_B^B = 0$$

רק מטריצה מספר 3 עונה על דרישה זאת.

(ב) (15 נק') נגדיר $v = 2v_1 - v_2 + 2v_3 - v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. חשב $T(v)$

פתרון: לפי הגדרה $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ולכן

$$[Tv]_B = [T]_B^B [v]_B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$Tv = -3v_1 - 3v_3 == -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$