תרגיל 9 – פתרון

1. תהי $f:\mathbb{R}\to[-\infty,\infty]$ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: $\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}}|f(x-h)-f(x)|dm=0$.

פתרון:

אנו יודעים כי מכיוון ש f אינטגרבילית אז לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונקציה g רציפה אשר מתאפסת מחוץ לקטע חסום כך ש $\int|f(x)-g(x)|dm<\varepsilon$. נבנה סדרה g_n של פונקציות רציפות כאלו כך ש: $\int|f(x)-g_n(x)|dm<\frac{1}{2^{n+1}}$.

מכאן נובע כי :

$$\int|f(x-h)-f(x)-(g_n(x-h)-g_n(x))|dm$$
$$\le\int|f(x-h)-g_n(x-h)|dm+\int|f(x)-g_n(x)|dm<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}$$

עכשיו, נשים לב כי מכיוון ש $|g_n(x-h)-g_n(x)|<|g_n(x-h)|+|g_n(x)|$, עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת ורציפות הפונקציה g נובע כי :

$$\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}}|g_n(x-h)-g_n(x)|dm$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\lim_{h\to0}|g_n(x-h)-g_n(x)|dm=\int_{\mathbb{R}}0=0$$

מכאן ש :

$$\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}}|f(x-h)-f(x)|dm<\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}}|g_n(x-h)-g_n(x)|dm+\frac{1}{2^n}$$
$$=0+\frac{1}{2^n}$$

נשאיף את n לאינסוף ונקבל את התוצאה.

שאלה ב

נניח ש X מ"ט, ו- $A\subseteq\mathcal{B}(X)$, מכל קבוצה $\emptyset\neq V$ פתוחה מתקיים $\mu(V)>0$.

הוכיחו כי אם $f,g:X\to\mathbb{R}$ רציפות כך ש- $g=f$ כמ"ע -μ אזי $f(x)=g(x)$ לכל $x\in X$.

והסיקו מכך כי לכל $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה, מתקיים: $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}\{|f(x)|\}$.

פתרון:

f,g רציפות $\Leftarrow$ $f-g$ רציפה.

הקבוצה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ פתוחה ולכן $V:=(f-g)^{-1}[\mathbb{R}\setminus\{0\}]$ היא קבוצה פתוחה.

אם $V=\emptyset$ אזי $f(x)=g(x)$ לכל $x\in X$.

אחרת, $\mu(V)>0$ בסתירה לכך ש $g=f$ כמ"ע (כלומר $0=g-f$ כמ"ע).

באופן דומה, עבור f ממשית רציפה על X:

$$\sup_{x\in X}\{|f(x)|\}=\inf\{C\mid C\geq f(x)\ \forall x\in X\}\quad (*)$$

נשים לב $V=[f>C]$ פתוחה (כתמונה הפוכה של קב' פתוחה תחת פונקציה רציפה), ולכן: אם $V\neq\emptyset$ אזי $\mu(V)>0$.

מכאן שמתקיים $f\leq C$ כמ"ע אם"ם מתקיים $f\leq C$ בכל מקום.

מסקנה: $(*)=\inf\{C\mid C\overset{a.e.}{\geq} f\}=$

$=\|f\|_\infty$

כלומר: $\sup_{x\in X}\{|f(x)|\}=\|f\|_\infty$

שאלה 3

(1) נניח כי $\mu(X)<\infty$.

הוכיחו כי אם $1\le r<p<\infty$ אזי $L^p(X)\subseteq L^r(X)$,

וכל $f\in L^p(X)$ מקיים:

$$\|f\|_r \le \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|f\|_p$$

<u>פתרון (1):</u>

תהי $f\in L^p(X)$. לפי אי״ש הולדר, עבור:

$$1<\frac{p}{r},\ \frac{p}{p-r}, \qquad \frac{1}{p/r}+\frac{1}{p/p-r}=1$$

$$\|f\|_r^r=\int |f|^r\cdot 1\,d\mu \le \left(\int (|f|^r)^{p/r}d\mu\right)^{r/p}\left(\int 1^{\frac{p}{p-r}}d\mu\right)^{\frac{p-r}{p}}=$$

$$=\mu(X)^{1-\frac{r}{p}}\|f\|_p^r$$

ולכן $\|f\|_r\le \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|f\|_p<\infty$.

לפיכך $f\in L^p(X) \Rightarrow f\in L^r(X)$,

כלומר $L^p(X)\subseteq L^r(X)$. ∎

(2) הוכיחו כי אם $r<p$ אזי $\ell^r \subsetneq \ell^p$

<u>פתרון (2):</u>

תהי $(x_n)_{\mathbb{N}}\in \ell^r$, כלומר: $\sum_{\mathbb{N}}|x_n|^r<\infty$. ①

נשים לב כי: $\sum_{\mathbb{N}}|x_n|^p=\sum_{\mathbb{N}}|x_n|^r|x_n|^{p-r}$. ②

לפי ①, קיים n_0 כך שלכל $n_0<n$ $|x_n|^r<1$ (בהכרח יש

טור מתכנס).

ולכן, לכל $n_0<n$ $|x_n|^{p-r}<1$ (כי $0<p-r$).

מכאן נקבל, לפי ② ולפי מבחן ההשוואה

[תזכורת: אם ממקום מסוים ואילך $|b_n|\le|c_n|$ ו- $\sum_{N}|c_n|<\infty$

אזי: $\sum_{N}|b_n|<\infty$]

נקבל בפרט: $|c_n|=|x_n|^r$ מתקיים כי: $\sum|x_n|^p<\infty$

$$|b_n|=|x_n|^r|x_n|^{p-r}=|x_n|^p$$

כלומר $(x_n)_N\in\ell^p$.

ובזאת לכל $(x_n)_N\in\ell^r$, נכון: $\ell^r\subseteq\ell^p$. ⊛

נותר להראות כי ההכלה ב ⊛ אמיתית (הכלה ממש)

נראה, כי קיים איבר $(x_n)_N\in\ell^p$ כך ש $(x_n)_N\notin\ell^r$.

לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $x_n:=\left(\frac{1}{n}\right)^{1/r}$

אזי $|x_n|^r=\frac{1}{n}$

ולכן. $\|(x_n)_N\|_r^r=\sum_{N}\frac{1}{n}=\infty$

קיבלנו $(x_n)_N\notin\ell^r$.

לעומת זאת: $|x_n|^p=\frac{1}{n^{p/r}}$, ו- $1<\frac{p}{r}$

לכן: $\|(x_n)_N\|_p^p=\sum_{N}\frac{1}{n^{p/r}}<\infty$

כלומר: $(x_n)_N\in\ell^p$.

מכאן שמתקיים $\ell^r\subsetneq\ell^p$. ∎

שאלה 4

תהיה f_n, f פונקציות ממשיות מדידות - $\mathbb{A}$,

כך ש- $f_n \xrightarrow[\text{כמ"ע}]{} f$

נניח שעבור $1 \le p < \infty$ קיימת $g \in L^p(X)$ כך שלכל n: $g \overset{a.e.}{\geq} |f_n|$.

הוכח כי $f, f_n \in L^p(X)$, וכי $\|f_n - f\|_p \to 0$.

פתרון: ראשית, מכיון ש $|f|^p, |f_n|^p \leq g^p$,

ו- $g \in L^p(X) \Leftrightarrow \int_X |g|^p \, d\mu < \infty \Rightarrow g^p \in L^1(X)$,

לכן $|f|^p, |f_n|^p \in L^1(X)$, כלומר: $f, f_n \in L^p(X)$.

נוכיח כעת ש $\|f_n - f\|_p \to 0$.

מכיון שנתון: $f_n \to f$, הרי שמתקיים: $|f_n - f|^p \xrightarrow{a.e.} 0$. (1)

כמו כן, מהנתון ש $g \overset{a.e.}{\geq} |f_n|$ לכל n, נקבל כי:

לכל n: $|f - f_n|^p \overset{a.e.}{\leq} (2g)^p$. (2)

בנוסף: $g \in L^p$ ולכן $(2g)^p \in L^1(X)$. (3)

לפי (2) ו-(3) ניתן להפעיל את משפט ההתכנסות הנשלטת ולקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} |f_n - f|^p \, d\mu \overset{(1)}{=} \int_X 0 \, d\mu = 0$$

כלומר $\|f_n - f\|_p \to 0$, כנדרש.

שאלה 7

יהי $1 \leq p < \infty$, ותהי $f \in L^p(X)$.

הוכחו כי המידה של הקבוצה $[f \neq 0]$ הינה σ סופית.

פתרון: קל להוכיח כי:

$$[f \neq 0] = [|f| > 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [|f| > \tfrac{1}{n}] \qquad (*)$$

נשים לב:

$$\frac{1}{n^p}\mu([|f| > \tfrac{1}{n}]) \leq \int_{[|f| > \frac{1}{n}]} |f|^p \, d\mu \leq \int_X |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p < \infty$$

ולכן:

$$\forall n: \quad \mu([|f| > \tfrac{1}{n}]) \leq (n\|f\|_p)^p < \infty$$

מכאן, עפ"י $(*)$, נקבל כי ניתן להציג את הקבוצה $[f \neq 0]$ כאיחוד בן מניה של קבוצות בעלות מידה סופית -

כלומר: הקבוצה $[f \neq 0]$ הינה σ-סופית.