תרגול 7

קשירות

1. הגדרה: מרחב טופולוגיה (X,τ) יקרא לא קשיר אם קיימות קבוצות V,U פתוחות לא ריקות כך ש $X=V\uplus U$ (איחוד זר). אחרת הוא יקרא קשיר.

   (א) הערה: זה שקול להגדרה הבאה: מרחב הוא לא קשיר אמ"ם יש בו תת קבוצה סגוחה לא טריוויאלית (כלומר, לא קבוצה ריקה או כל המרחב)

   (ב) דוגמא: $[0,1]\cup(2,3)$ לא קשיר.

   (ג) דוגמא: $\mathbb{R}$ קשיר. $[0,1]$ קשיר.

   (ד) דוגמא: $\mathbb{Q}$עם הטופולוגיה האוקלידית לא קשיר כי $\mathbb{Q}\cap\left(\sqrt{2},\infty\right)$ היא קבוצה סגוחה ב$\mathbb{Q}$.

   (ה) שאלה: האם $(X,\tau_{\text{co-finite}})$ קשיר?

   (ו) תרגיל: נגדיר על $\mathbb{R}$ טופולוגית סורגנפריי כך : τ_S להיות כל הקבוצות שמתקבלות מאיחוד כל שהוא של קטעים מהצורה $[a,b)$ עבור $a<b$. האם קשיר?

2. תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי ו$A\subseteq X$ תת קבוצה צפופה. הוכיחו שאם A קשירה (עם טופולוגיית תת המרחב, כמובן) אז X קשיר.

3. תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A,B\subseteq X$ תתי קבוצות קשירות כך ש$cl_X(A)\cap B\neq\emptyset$. אז $A\cup B$ קשיר.

4. תרגיל: אם $A\subseteq X$ תת קבוצה קשירה, האם $int(A)$ קשיר?

5. תרגיל: תמונה רציפה של קשיר הוא קשיר. כלומר תהא $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ רציפה ועל X קשיר, אזי Y קשיר.

6. הגדרה: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. נגדיר יחס שקילות על X כך: $x\sim x'$ אמ"מ קיימת תת קבוצה קשירה A כך ש $x,x'\in A$. מחלקות השקילות נקראות רכיבי קשירות.
   הערה: רכיב הקשירות של x הוא תת הקבוצה הקשירה המקסימלית שמכילה את x.

   (א) לדוגמא: ב (X,τ_{disc}) , רכיב הקשירות של x הוא $\{x\}$. הסבר: כל תת קבוצה A בת יותר מאיבר אחד אינה קשירה, כי ניתן לחלק $A=\{x\}\uplus A\setminus\{x\}$, שתיהן קבוצות פתוחות ב$A$. לכן $\{x\}$ היא הקבוצה הקשירה המקסימלית שמכילה את x.

7. תרגיל: במרחב $(\mathbb{R}, \tau_S)$, הישר של סורגנפריי, שהגדרנו לעיל, מהם רכיבי הקשירות?

8. תרגיל: תהא $f : (\mathbb{R}, \tau_{|*|}) \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ רציפה . הוכיחו כי f קבועה.

בסיסים

1. יהא (X, τ) מ״ט. $B_\tau \subseteq \tau$ (כלומר, אוסף של קבוצות פתוחות בτ) יקרא בסיס לטופולוגיה אם כל קבוצה פתוחה בτ היא איחוד כלשהוא של איברים ב B_τ.
   (א) למשל, בכל מ״מ הכדורים הפתוחים הם בסיס.
   (ב) הקטעים $[a, b)$ הם בסיס ל τ_S סונגרי.
   (ג) הנקודונים בטופלוגיה הדיסקרטית.

2. בהינתן מרחב טופולוגי (X, τ) ובסיס B_τ, קבוצה $O \in B_\tau$ תיקרא ״קבוצה פתוחה בסיסית״.

3. תרגיל: יהא (Y, τ') מ״ט ויהא $B_{\tau'}$ בסיס לטופולוגיה. פונקציה $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ היא רציפה אמ״מ לכל תמונה הפוכה של קבוצת פתוחה בסיסית היא פתוחה.

4. תרגיל: יהא (X, τ) מ״ט ו B_τ בסיס. אזי A קבוצה צפופה אמ״מ היא נחתכת באופן לא ריק עם כל קבוצה פתוחה בסיסית.

5. תרגיל: יהא (X, τ) מ״ט. אזי הוא T_2 אמ״מ ניתן להפריד שתי נקודות בעזרת קבוצות פתוחות בסיסיות.

6. הגדרה: תהא X קבוצה ותהא B אוסף תתי קבוצות המקיימת כי חיתוך של כל שניים מ B הוא איחוד כלשהוא של קבוצות מ B. אזי נוכל להגדיר את הטופולוגיה הנוצרת ע״י B להיות כל הקבוצות שהם איחוד כלשהוא של קבוצות מ B. נסמנה τ. נשים לב כי B הוא בסיס ל τ .
   (א) למשל $B = \{a + b\mathbb{Z} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ הוא בסיס לטופולוגיה על$\mathbb{Z}$.
   הוכחה: אם $x \in (a_1 + b_1\mathbb{Z}) \cap (a_2 + b_2\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ אזי

$$(a_1 + b_1\mathbb{Z}) \cap (a_2 + b_2\mathbb{Z}) = (x + b_1\mathbb{Z}) \cap (x + b_2\mathbb{Z}) = x + lcm\{b_1, b_1\}\mathbb{Z}$$

   . $(\subseteq)$. כי $x + b_1 z_1 = x + b_2 z_2$ גורר $b_1 z_1 = b_2 z_2$ ולכן $b_1 z_1 = b_2 z_2 = z\, lcm\{b_1, b_2\}$ וסיימנו.
   $(\supseteq)$ $x + lcm\{b_1, b_1\}\mathbb{Z} \subseteq x + b_i\mathbb{Z}$ ולכן גם בחיתוך.

7. הגדרה: (X, τ) יקרא בעל תכונה B_2 (או בעל תכונת מניה שניה) אם יש לו בסיס בן מניה.
   (א) דוגמא: $\mathbb{R}$ עם הכדורים.$\{B(q, \epsilon) : q \in \mathbb{Q}, \epsilon \in \mathbb{Q}_+\}$.

8. תרגיל: האם $(X, \tau_{co-finite})$ הוא B_2?

9. תרגיל: תת מרחב של B_2 הוא B_2.

10. תזכורת: (X, τ) יקרא ספרבילי אם יש תת קבוצה צפופה בת מניה.

11. תרגיל: B_2 גורר ספרבילי.

12. הערה: במרחב מטרי B_2 שקול ספריבילי.

13. תרגיל: l_∞ אינו B_2 (ולכן לא ספרבילי).

14. תרגיל: l_1 הוא ספרבילי (ולכן B_2):