## 5.4 תרגילים

1. עבור כל אחד מהיחסים הבאים המוגדרים ב $\mathbb{R}$ קבע האם הוא רפלקסיבי, אי רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי חלש, אנטי-סימטרי חזק, טרנזיטיבי.

א. $|x-y|<1 \leftrightarrow xRy$ ב. $x-y<1 \leftrightarrow xSy$ ג. $x-y<-1 \leftrightarrow xTy$

**פתרון:**

**א.** לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $|x-x|=0<1$ ומכאן נובע כי $R$ רפלקסיבי ובוודאי אינו אי רפלקסיבי. $R$ סימטרי מכיון ש-$|x-y|=|y-x|$ ומכאן

$$|x-y|<1 \leftrightarrow |y-x|<1$$

$R$ אינו אנטי סימטרי חלש (ואם כן גם אינו אנטי סימטרי חזק) כי למשל $\frac{1}{2}R0 \wedge 0R\frac{1}{2}$, אולם $\frac{1}{2} \neq 0$.

$R$ אינו טרנזיטיבי כי למשל $0R\frac{2}{3} \wedge \frac{2}{3}R\frac{4}{3}$, אולם לא מתקיים $0R\frac{4}{3}$.

**ב.** לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x-x=0<1$ ומכאן נובע כי $S$ רפלקסיבי ובוודאי אינו אי רפלקסיבי.

$S$ אינו סימטרי כי למשל $0S2$ אך לא מתקיים $2S0$.

$S$ גם אינו סימטרי חלש (ואם כן גם אינו אנטי סימטרי חזק) כי למשל $\frac{1}{2}S0 \wedge 0S\frac{1}{2}$, אולם $\frac{1}{2} \neq 0$.

$S$ אינו טרנזיטיבי כי למשל $\frac{2}{3}S0 \wedge \frac{4}{3}S\frac{2}{3}$, אולם לא מתקיים $\frac{4}{3}S0$.

**ג.** לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x-x=0 \not< -1$. מכאן נובע כי $T$ אי רפלקסיבי ובוודאי אינו רפלקסיבי. $T$ אינו סימטרי כי למשל $0T2$ אבל לא מתקיים $2T0$.

$T$ אנטי-סימטרי חזק (ולכן גם חלש), שכן אילו היה מתקיים $x-y<-1 \wedge y-x<-1$ היה מתקיים גם

$$0=(x-y)+(y-x)<-2$$

$T$ טרנזיטיבי, שכן

$$(x-y<-1 \wedge y-z<-1) \rightarrow (x-z=(x-y)+(y-z)<-2<-1)$$

2. מצא אלו מבין התכונות - רפלקסיביות, אי רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות חלשה, אנטי-סימטריות חזקה, טרנזיטיביות - מקיים כל אחד מהיחסים הבאים, כאשר הוא מוגדר בכל אחת מהקבוצות $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\{3,5,7,9\}$ :

א. $kR\ell \leftrightarrow$ קיים שלם אי זוגי $m$ כך ש-$k = m\ell$.

ב. $kS\ell \leftrightarrow$ קיים שלם זוגי $m$ כך ש-$k = m\ell$.

ג. $kT\ell \leftrightarrow$ קיים שלם אי זוגי $m$ כך ש-$\ell = mk$ או $k = m\ell$.

**פתרון:**

**א.** $kRk$ לכל $k$ שלם (כי $k = 1 \cdot k$). מכאן נובע כי $R$ רפלקסיבי ובוודאי אינו אי רפלקסיבי בשלוש הקבוצות.

$9R3$ אבל לא מתקיים $3R9$ ומכאן נובע כי $R$ אינו סימטרי באף אחת מהקבוצות.

מכיון ש-$R$ אינו אי רפלקסיבי, הרי שאינו אנטי-סימטרי חזק באף אחת מהקבוצות.

ב- $\mathbb{Z}$ הוא גם אינו אנטי-סימטרי חלש שכן $3R(-3)$, $(-3)R3$ אבל $3 \neq -3$. אולם ב-$\mathbb{N}$ וב-$\{3,5,7,9\}$ דווקא כן, שכן בקבוצות אלו $k \geq \ell \leftarrow kR\ell$ ולכן

$$k = \ell \leftarrow k \geq \ell \wedge \ell \geq k \leftarrow kR\ell \wedge \ell Rk$$

לסיום $R$ טרנזיטיבי בכל הקבוצות שכן אם $kR\ell \wedge \ell Rp$ הרי קיימים $m_1, m_2$ אי-זוגיים כך ש-$k = m_1\ell \wedge \ell = m_2 p$ ואז $k = (m_1 m_2)p$, ומכיון ש-$m_1 m_2$ אי זוגי, הרי $kRp$.

**ב.** $S$ אינו רפלקסיבי באף אחת מהקבוצות שכן למשל לא מתקיים $3S3$.

$S$ גם אינו אי רפלקסיבי ב- $\mathbb{Z}$, שכן $0S0$, אולם מכיון שלכל $k \neq 0$ לא מתקיים $kSk$, הרי ש-$S$ אי רפלקסיבי ב-$\mathbb{N}$ וב-$\{3,5,7,9\}$.

$S$ אינו סימטרי ב-$\mathbb{N}$ וב- $\mathbb{Z}$, שכן למשל $2S1$ אבל לא מתקיים $1S2$. עם זאת $S$ סימטרי ב-$\{3,5,7,9\}$ שכן הוא היחס הריק בקבוצה זאת.

$S$ טרנזיטיבי בכל הקבוצות, שכן אם $kS\ell \wedge \ell Sp$, הרי קיימים $m_1, m_2$ זוגיים כך ש-$k = m_1\ell \wedge \ell = m_2 p$ ואז $k = (m_1 m_2)p$, ומכיון ש-$m_1 m_2$ זוגי, הרי $kSp$.

לסיום, אם $kS\ell \wedge \ell Sk$, אזי מכיון ש-$S$ טרנזיטיבי נקבל $kSk$. מכיון שזה לא יתכן ב-$\mathbb{N}$ וב-$\{3,5,7,9\}$, הרי ש-$S$ אנטי-סימטרי חזק, ובוודאי גם חלש, בקבוצות אלו.

ב- $\mathbb{Z}$ יתכן אמנם כי $kSk$ אבל רק אם $k = 0$ ואז גם $\ell = 0$ ובפרט $k = \ell$ ואם כן $S$ אנטי-סימטרי חלש ב- $\mathbb{Z}$, אך כמובן לא אנטי-סימטרי חזק, שכן $S$ אינו אי רפלקסיבי

ב- $\mathbb{Z}$.

ג. $kTk$ לכל $k$ שלם. מכאן נובע כי $T$ רפלקסיבי ובוודאי לא אי רפלקסיבי בכל שלוש הקבוצות.

לפי אופן הגדרת היחס ברור גם כי $T$ סימטרי בכל הקבוצות.

$T$ אינו אנטי-סימטרי חלש (ובוודאי לא אנטי-סימטרי חזק) באף אחת מהקבוצות שכן $3T9$, $9T3$ אבל $9 \neq 3$.

לסיום, $T$ אינו טרנזיטיבי ב-$\mathbb{N}$ וב- $\mathbb{Z}$ כי למשל $15T5$, $3T15$ אבל לא מתקיים $3T5$. בדיקה זהירה מראה עם זאת כי לא ניתן למצוא דוגמה כזאת ב-$\{3,5,7,9\}$ ולכן $T$ טרנזיטיבי בקבוצה זאת.

3. בכל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם יתכן יחס כזה; אם כן - הבא דוגמה, אם לא - הסבר מדוע.

א. סימטרי ולא טרנזיטיבי.

ב. אנטי סימטרי (חזק) ולא טרנזיטיבי.

ג. סימטרי, אנטי סימטרי (חלש) ולא טרנזיטיבי.

ד. טרנזיטיבי, סימטרי ולא רפלקסיבי.

ה. טרנזיטיבי, לא אנטי סימטרי (חזק) ואי רפלקסיבי.

ו. טרנזיטיבי, לא סימטרי ולא אנטי סימטרי (חלש).

**פתרון:**

**א.** למשל היחס $xRy \leftrightarrow |x-y| < 1$ ב $\mathbb{R}$

**ב.** למשל היחס $xRy \leftrightarrow 0 < x-y < 1$ ב $\mathbb{R}$

**ג.** לא, כי אם $R$ סימטרי וגם אנטי-סימטרי חלש, אזי לכל $x, y$ מתקיים

$$xRy \rightarrow (xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y$$

ואז לכל $x, y, z$ מתקיים

$$(xRy \wedge yRz) \rightarrow (x = y \wedge yRz) \rightarrow xRz$$

כלומר $R$ בהכרח טרנזיטיבי.

ד. למשל היחס

$$kR\ell \leftrightarrow k\cdot\ell \text{ אי זוגי}$$

ב $\mathbb{Z}$.

ה. לא, כי אם $R$ לא אנטי-סימטרי חזק, הרי קיימים $x,y$ כך ש-$xRy \wedge yRx$ ואז, אם $R$ גם טרנזיטיבי נקבל $xRx$ ומכאן נובע כי $R$ אינו אי רפלקסיבי.

ו. למשל היחס $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(a,c),(b,c)\}$ ב $\{a,b,c\}$.

4. א. כמה יחסים סימטריים יש בקבוצה בת $n$ איברים?

ב. כמה יחסים אנטי-סימטריים חזקים? ג. וכמה חלשים?

.6

**פתרון:** בבניית יחסים כאלה יש לבצע $n$ החלטות לגבי ההשתייכות ליחס של זוגות מהצורה $(a,a)$ וכן $\binom{n}{2}$ החלטות לגבי ההשתייכות ליחס של צמדי הזוגות $(a,b)$, $(b,a)$ עבור $a \neq b$. לגבי זוגות מהצורה $(a,a)$ יש שתי אופציות קרי להשתייך או לא להשתייך, במקרה של יחסים סימטריים ואנטי-סימטריים חלשים, ורק אופציה אחת קרי לא להשתייך, במקרה של יחסים אנטי-סימטריים חזקים. עבור צמדי הזוגות $(a,b)$, $(b,a)$ יש במקרה של יחסים סימטריים שתי אופציות קרי שני הזוגות שייכים או שניהם אינם שייכים, ואילו במקרה של יחסים אנטי-סימטריים יש שלוש אופציות:

$$(a,b)\in \wedge (b,a)\notin; \quad (a,b)\notin \wedge (b,a)\in; \quad (a,b)\notin \wedge (b,a)\notin$$

התשובות לסיכום הן:

א. $2^n\cdot 2^{\binom{n}{2}}$ ב. $1^n\cdot 3^{\binom{n}{2}}$ ג. $2^n\cdot 3^{\binom{n}{2}}$

5. כיוון שפונקציה $f: A\to A$ מוגדרת פורמלית כתת קבוצה של $A\times A$ ניתן להתבונן בה גם כיחס ב $A$. הוכח כי בהסתכלות כזו:

א. $f$ רפלקסיבית $\Longleftrightarrow f = i_A$.

ב. $f$ סימטרית $\Longleftrightarrow f^2 = i_A$.

ג. $f$ טרנזיטיבית $\Longleftrightarrow f = f^2$.

**פתרון:**

א. $f$ רפלקסיבית אם ורק אם לכל $x\in A$ מתקיים $(x,x)\in f$ כלומר, בכתיב פונקציות $f(x)=x$ לכל $x\in A$ כלומר $f=i_A$.

ב. $\Leftarrow$ לכל $x \in A$, $(x, f(x)) \in f$ ואז אם $f$ סימטרית גם $(f(x), x) \in f$ כלומר $f(f(x)) = x$ לכל $x \in A$ ואם כן $f^2 = i_A$.

$\Longrightarrow$ אם $(x, y) \in f$ כלומר $y = f(x)$ אזי $x = f^2(x) = f(y)$ כלומר גם $(y, x) \in f$ כנדרש.

ג. $\Leftarrow$ לכל $x \in A$, $(x, f(x)) \in f \wedge (f(x), f^2(x)) \in f$ ואז אם $f$ טרנזיטיבית גם $(x, f^2(x)) \in f$ כלומר $f(x) = f^2(x)$ לכל $x \in A$ ואם כן $f = f^2$.

$\Longrightarrow$ אם $(x, y) \in f \wedge (y, z) \in f$ כלומר

$y = f(x) \wedge z = f(y)$ אזי $z = f^2(x) = f(x)$ ולפיכך $(x, z) \in f$.

6. קבע האם לכל שני יחסים $R, S$ באותה קבוצה $A$ מתקיים

א. $R, S$ רפלקסיביים $\longleftarrow$ $R \cap S$ רפלקסיבי.

ב. $R, S$ סימטריים $\longleftarrow$ $R \cap S$ סימטרי.

ג. $R, S$ טרנזיטיביים $\longleftarrow$ $R \cap S$ טרנזיטיבי.

ד. $R, S$ יחסי שקילות $\longleftarrow$ $R \cap S$ יחס שקילות.

ה. $R, S$ רפלקסיביים $\longleftarrow$ $R \cup S$ רפלקסיבי.

ו. $R, S$ סימטריים $\longleftarrow$ $R \cup S$ סימטרי.

ז. $R, S$ טרנזיטיביים $\longleftarrow$ $R \cup S$ טרנזיטיבי.

ח. $R, S$ יחסי שקילות $\longleftarrow$ $R \cup S$ יחס שקילות.

**פתרון:**

א. כן, כי אם $R, S$ רפלקסיביים, אזי לכל $x \in A$ מתקיים $(x, x) \in R$ וגם $(x, x) \in S$ ואם כן $(x, x) \in R \cap S$.

ב. כן, כי אם $R, S$ סימטריים, אזי

$$(x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R, \quad (x, y) \in S \leftrightarrow (y, x) \in S$$

לכן גם

$$(x, y) \in R \cap S \leftrightarrow (y, x) \in R \cap S$$

ג. כן, כי אם $R, S$ טרנזיטיביים, אזי

$$\begin{gathered}(x,y)\in R\cap S\wedge(y,z)\in R\cap S\\ \updownarrow\\ [(x,y)\in R\wedge(x,y)\in S]\wedge[(y,z)\in R\wedge(y,z)\in S]\\ \updownarrow\\ [(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R]\wedge[(x,y)\in S\wedge(y,z)\in S]\\ \downarrow\\ (x,z)\in R\wedge(x,z)\in S\\ \updownarrow\\ (x,z)\in R\cap S\end{gathered}$$

ד. כן, כפי שנובע מהסעיפים הקודמים.

ה. כן, כי אפילו אם רק $R$ רפלקסיבי, אזי לכל $x\in A$ מתקיים $(x,x)\in R$ ובוודאי $(x,x)\in R\cup S$.

ו. כן, כי אם $R, S$ סימטריים, אזי לכל $x,y\in A$ מתקיים

$$(x,y)\in R\leftrightarrow(y,x)\in R,\quad (x,y)\in S\leftrightarrow(y,x)\in S$$

ולכן גם

$$(x,y)\in R\cup S\leftrightarrow(y,x)\in R\cup S$$

ז. לא, למשל כאשר $A=\{a,b\}$, $S=\{(b,a)\}$, $R=\{(a,b)\}$.

ח. לא, למשל כאשר

$$\begin{aligned}&A=\{a,b,c\},\quad R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}\\ &S=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}\end{aligned}$$

7. עבור יחס $R$ בקבוצה $A$ נגדיר את היחס $R^{-1}$ ע"י $yRx\longleftrightarrow xR^{-1}y$, ועבור יחסים $R, S$ באותה קבוצה $A$ נגדיר את היחס $R\cdot S$ ע"י

$$x(R\cdot S)y\longleftrightarrow\exists u\in A: xRu\wedge uSy$$