

אינפי 3 תרגיל 6

1. נגדיר פונקציה

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

מצאו את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $(3, 2, 1)$ בכיוון $h = (h_1, h_2, h_3)$ שימו לב ש h לא בהכרח וקטור יחידה.

2. תהי $f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$ ומקיימת כי

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(t, -t)}{t} = 1$$

מצא את $f'_y(0, 0)$.

3. תהי $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור \mathbb{R}^2 . נתון

$$\frac{\partial f}{\partial u}(7, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(7, 1) = 3$$

. נגדיר:

$$u(x, y) = 2x + 3y \quad v(x, y) = x - y$$

$$z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 1)$.

4. תהי $z(x, y)$ גזירה ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים במישור הממשי. כתבו את הביטוי

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$$

באמצעות קוארדינטות פולאריות. (כלומר $x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$ כאשר $r \geq 0$ ו $0 \leq \varphi < 2\pi$)

5. הוכח כי הפונקציות

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, \quad f(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

מקיימות את המשוואה

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

6. נתונה פונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

מצא את $f''_{xy}(0, 0)$ ואת $f''_{yx}(0, 0)$.

7. תהי $f(x, y)$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים בתחום $D = (0, \infty) \times (0, \infty)$. ונניח ש x, y מבוטאים באמצעות s, t לפי $x = e^{s+t}$, $y = e^{s-t}$ כך שניתן להגדיר הרכבה

$$g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$$

הוכח כי

$$g_{st} = 0 \Leftrightarrow x^2 f_{xx} + x f_x = y^2 f_{yy} + y f_y$$