תרגול 6

9 ביולי 2013

דיוק לשיעור קודם: ב"קריטריון הקצר ביותר" לתת מרחב (לכל $w, u \in W, \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha u + w \in W$) יש לוודא את הדרישה האלמנטרית ש $W \neq \emptyset$.

המרחב הנפרש (span)

הקדמה/מוטיבציה: ראינו בשיעור קודם ש $S = \{(x,y)\,|\,x,y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ אינו תת מרחב.
אנו רוצים להוסיף ל S וקטורים כך שהקבוצה החדשה $S \subset W$ תהיה תת מרחב.
עפ"י הגדרת תת מרחב ברור כי Wמכילה את כל הצ"ל של איברי S כי $S \subset W$ ו W סגור לחיבור וכפל בסקאר.
לכן מגדירים:
הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, v_2 \ldots, v_n \in V$
אזי $span(\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n \,|\, \alpha_i \in \mathbb{F}\}$
ובאופן כללי $V \supset S = \emptyset$ אזי $span(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n \,|\, \alpha_i \in \mathbb{F}, v_i \in S\}$.
אוסף כל הצירופים הלינאריים של איברי S.

דוגמא $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ מהו $span(S)$?

פתרון : $span(S) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} |\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} |\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

כלומר מישור xy בתוך המרחב.
משפט: בסימונים לעיל $span(S) \subset V$ הינו תת מרחב שמכיל את S. והוא הכי קטן (כלומר אם $S \subset W$ אזי $W \subset span(S)$).

תרגיל: $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

1. האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in span(S)$?

   פתרון: נבדוק האם קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

   כך ש $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

   שקול לבדוק האם למערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ קיים פתרון?

   נבדוק $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right)$

יש פתרון למערכת לדוגמא (אם נבחר שרירותית $\alpha_3 = 0$) $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$

ואכן $3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. מהו $span(S)$?

פתרון: באופן דומה נבדוק אלו וקטורים $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in span(S)$

נדרג את המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 0 & 1 & 4 & b-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 3a-2b \\ 0 & 1 & 4 & b-a \end{array}\right)$$

ואכן $(3a-2b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

כלומר $span(S) = \mathbb{R}^2 = V$

הערה: בפרט $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\})$ ולכן S ת"ל.

ובנוסף, $span(S) = span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\})$.

תרגיל: $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

$S = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ מהו $span(S)$

והאם S בת"ל ?

פתרון רוצים למצוא את כל המטריצות $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

כך ש $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

נייצג כל מטריצה באמצעות וקטור. למשל $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

כעת השאלה שקולה ל $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ולכן, כמו קודם נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 3 & 1 & d-b \\ 0 & 2 & 2 & a-b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & d-b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-2c \end{array}\right)$$

אם נבחר $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ רואים כי חייבים לקחת $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$ ולכן S בת"ל
בנוסף רק אם $a - b - 2c = 0$ יש פתרון למערכת ולכן

$$span(S) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b - 2c = 0\} = \{\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix}\} =$$

$$\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= span\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

בסיס ומימד

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. קבוצה $B \subset V$ בת"ל כך ש $span(B) = V$ נקראת בסיס.

הגדרה: המימד של V הוא $dim_{\mathbb{F}}V = |B|$ כאשר B בסיס. V יקרא נוצר סופית אם $dim_{\mathbb{F}}V < \infty$

משפט: ההגדרה של מימד מוגדרת היטב כלומר לכל שתי בסיסים B, B' הגדלים שלהם שווים. $|B| = |B'|$.

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$ קבוצה בת"ל
נניח שקיים $v \in V \backslash span(S)$. הוכח: $S' = \{v_1, \dots v_n, v\}$ בת"ל.
הוכחה: נניח $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n + \alpha v = 0$
$\Leftarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = -\alpha v$
$\Leftarrow \alpha = 0$ כי אחרת נקבל ש $v \in span(S)$ ע"י חילוק ב $-\alpha$.
$\Leftarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = 0 \Leftarrow \alpha_i = 0$ כי S בת"ל.

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$. נניח v_n תלוי לינארית בוקטורים האחרים.
אזי $span(S) = spab(S')$ כאשר $S' = \{v_1, \dots v_{n-1}\}$ (בתרגיל בית)

משפט: יהיה $B \subset V$ אזי התנאים הבאים שקולים:

1. Bבסיס
2. B קבוצה בת"ל מקסימאלית
3. B קבוצה פורשת את V- מינימאלית.

דוגמא: $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. ראינו כי $span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}) = \mathbb{R}^2$. נבדוק כי בת"ל $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ולכן הוקטורים בת"ל. מסקנה $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ בסיס ל V.

תרגיל: יהיה $V = \mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. מצא $dim_{\mathbb{F}}V$

1. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$

פתרון: קל לראות כי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה פורשת ובת"ל ולכן בסיס. $dim_{\mathbb{F}}V=2$

2. כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$

פתרון: במקרה זה צריך יותר וקטורים לבסיס כי יש פחות סקלארים להשתמש בהם.

טענה: $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right\}$ בסיס.

הוכחה: B פורשת: יהיה $\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix}\in V$ אזי

$\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$.

B בת"ל. נניח $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftarrow \begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 i\\\alpha_3+\alpha_4 i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftarrow \alpha_i=0$.

דוגמאות לבסיסים סטנדרטים:

1. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. בסיס $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

2. $V=\mathbb{C}^{3\times 2}$ מעל שדה $\mathbb{C}$ בסיס

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

3. $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$. בסיס $B=\{1,x,x^2\}$

4. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ בסיס $B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\ldots\}$ בסיס אינסופי.

משפט השלישי חינם

יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד n $(dim_{\mathbb{F}}V=n)$. תהא קבוצה $B\subset V$ אם B מקיימת 2 מתוך 3 התנאים הבאים אזי היא מקיימת גם את השלישי (ובפרט B תהיה בסיס).

1. $\#B=n$
2. B פורשת את V
3. B בת"ל

דוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. יהיו $B=\{v_1,v_2\}$ כך ש $v_i\neq 0$ ו $v_1\neq\alpha v_2$ (כלומר v_1 אינו פרופורציונאלי ל v_2) אזי B בסיס ל V.

הוכחה: ראינו כי המימד של המרחב שווה 2. מהנתון נובע כי B בת"ל ובנוסף $\#B=2$ לכן ממשפט השלישי חינם B בסיס.

דוגמא פרטית $B=\left\{\begin{pmatrix}\pi\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\-1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס.

תרגיל: $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. השלם את

$S=\{v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\}$ לבסיס.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V=4$ ראינו כי S בת"ל ולכן מספיק למצוא וקטור $v\notin span(S)$ ואז $S\cup\{v\}$ קבוצה בת"ל (לפי אחד התרגילים שעשינו) מגודל 4 ולכן בסיס.

ראינו כי $span(S)=\{\begin{pmatrix}b+2c&b\\c&d\end{pmatrix}\}$ ולכן $\begin{pmatrix}5&1\\1&0\end{pmatrix}\notin span(S)$.

תרגיל: $V=\mathbb{C}_2[x]$ מעל $\mathbb{C}$. $B=\{1+x,1+ix,ix^2,1+ix^2\}$ מצא $B^{'}\subset B$ כך ש $B^{'}$בסיס ל V.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V=3$ מספיק למצוא 3 וקטורים ב B שהם בת"ל. נבדוק באופן כללי האם הווקטורים בת"ל.

ש"ל האם למערכת $\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&0\\1&i&0&0&0\\0&0&i&i&0\end{array}\right)$ יש פתרון לא טרויאלי:

$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&i&0&0\\0&0&i&i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&i-1&0&0\\0&0&i&i\end{pmatrix}$, כלמור הוקטורים ת"ל אבל אם היינו מתחילים עם $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&i&0&0\\0&0&i&0\end{array}\right)$ היינו מגיעים ל $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&i-1&0\\0&0&i\end{pmatrix}$

כלומר $B^{'}=\{1+x,1+ix,ix^2\}$ קבוצה בת"ל ולכן בסיס.

הערות כלליות:

1. לכל קבוצה $B\subset V$ שפורשת את Vניתן למצוא $B^{'}\subset B$ כך ש $B^{'}$ בסיס (לצמצם את B לבסיס)

2. לכל קבוצה $B\subset V$ בת"ל ניתן למצוא $B\subset B^{'}$ כך ש $B^{'}$ בסיס (להרחיב את Bלבסיס)