

מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים נתונה קבוצה X ויחס R על הקבוצה. עבור כל יחס קבע האם הוא יחס סדר, יחס סדר חזק¹ ואם לא יחס סדר מלא. (ייתכן שיותר מאחד מהם. שימו לב שיחס סדר מלא הוא יחס סדר.)

1. $X = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 2^a \leq 2^b\}$

2. $X = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq b^2\}$

3. $X = \mathbb{N}, R = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n^2 < m\}$

שאלה 2

מצאו את כל יחסי הסדר המלאים על הקבוצה $\{4, 5, 6\}$. הסבירו מדוע אין יחסי סדר מלאים נוספים.

שאלה 3

1. תהי X קבוצה ו- R יחס סדר על X . נניח כי $Y \subseteq X$ ונגדיר $S = R \cap (Y \times Y)$.

הראו כי S יחס סדר על Y .

2. נניח $X = \mathbb{N}, R = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid m = 0 \pmod{n}\}$. הראו כי R יחס סדר וציירו

דיאגרמת הסה של יחס הסדר $S = R \cap (Y \times Y)$ עבור הקבוצות הבאות:

a. $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b. $Y = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 24\}$

c. $Y = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

שאלה 4

תהי X קבוצה ו- R יחס על X . נגדיר את היחסים הבאים:

א. $R^2 = R \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in X : xRz \wedge zRy\}$

ב. $R^{op} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$

ג. $I = \{(x, x) \mid x \in X\}$

הוכיחו כי R יחס סדר אם ורק אם $R^2 \subseteq R$ וגם $R \cap R^{op} = I$.

שאלה 5

תהי A קבוצה ו- \leq יחס סדר על A . נגדיר יחס R על $A \times A$ ע"י: $(a, b)R(c, d)$ אם

$a \leq c$ וגם $a \neq c$ או $a = c$ וגם $b \leq d$.

הראו כי R יחס סדר על $A \times A$ (הסדר הזה נקרא לפעמים הסדר המילוני [לקסיקוגרפי בלע"ז]).

ציירו דיאגרמת הסה של R עבור $A = \{0, 1, 2\}$ ו- $\leq = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (0, 2)\}$ (אין צורך להוכיח כי זה יחס סדר).

¹ למי שלא זוכר מכיר: יחס $<$ על קבוצה A הוא יחס סדר חזק אם הוא טרנזיטיבי, וא-רפלקסיבי (לכל $a \in A$, הפסוק $a < a$ שקרי). כל יחס סדר חזק הוא א-סימטרי (אם $a < b$ אז לא מתקיים $b < a$). [במילים אחרות: הוא כמו היחס $<$ על מספרים ממשיים.]