אינפי 4 - פתרון 1

4 במאי 2017

1.1 להבנה

תזכורת: עד עתה לרוב עבדנו עם הקואורדינטות הקרטזיות (x,y) . בדומה, הגדרנו באינפי 3 את הקואורדינטות הפולאריות (r,θ) המציינות את המרחק מהראשית ואת הזווית ביחס לציר ה-x בהתאמה.

1. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פו' גזירה ברציפות המקיימת את המשוואה

$$\left|f\left(\theta\right)\right|^{2}+\left|f'\left(\theta\right)\right|^{2}\neq0,\quad\theta\in[a,b]$$

(א) הראו כי הגרף של $r=f\left(\theta\right)$ הוא עקומה חלקה ב-$\mathbb{R}^{2}$.

פתרון 1. אם נרשום $\phi\left(\theta\right)=\left(f\left(\theta\right)\cos\theta,f\left(\theta\right)\sin\theta\right)$ כבתור גרף בקואורדינטות קרטזיות ועם $\theta\in[0,2\pi]$ אז נקבל כי $\|\phi'\|^{2}$ הוא בדיוק הביטוי הרשום מעלה ולכן אכן זו עקומה חלקה.

(ב) הוכיחו את הנוסחה לחישוב אורך העקומה בקואורדינטות פולאריות.

פתרון 2. כפי שעשינו מעלה ניתן להטיל בכל רכיב על הציר המתאים ומהצבה ישירה אחרי שנעזרים בזהות $\sin^{2}\theta+\cos^{2}\theta=1$,

$$L\left(\phi\right)=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{r^{2}+r_{\theta}^{2}}d\theta.$$

2. עקומת הנפרואיד[1] נתונה בקואורדינטות קרטזיות ע"י

$$\gamma\left(t\right)=\left(3a\cos t-a\cos3t,3a\sin t-a\sin3t\right)$$

היכן ש$t\in[0,2\pi]$.

(א) למחשבה (אך ממש לא להגשה): תנסו להצדיק לעצמכם את המשוואה הפולארית של הנפרואיד:$r^{2}=\frac{1}{2}a^{2}\left(5-3\cos2\phi\right)$ היכן ש $\tan\theta=\frac{3\sin\phi-\sin3\phi}{3\cos\phi-\cos3\phi}$.

(ב) חשבו את אורך העקומה בקואורדינטות הנוחות לכם.

פתרון 3.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\left(3a\sin t-3a\sin3t\right)^{2}+\left(3a\cos t-3a\cos3t\right)^{2}}dt & =3a\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+1-2a\left(\sin t\sin3t+\cos t\cos3t\right)}\\
 & =3a\int_{0}^{2\pi}\sqrt{2-2a\cos2t}dt\\
 & =24a.\end{aligned}$$

3. יהיו α,β עקומות שקולות.

(א) הראו כי שקילות מסילות היא יחס שקילות.

[1] הלכה למעשה מדובר במקרה פרטי של משפחת עקומות מעניינת בשם אפיציקלואידים בו בחרנו את מספר החודים להיות 2, פרט שבו אתם יכולים להעזר. הדמיון בין נפרולוג ונפרואיד איננו סמנטי גרידא. שרטטו והווכחו.

פתרון 4. רפלקסיביות טריוויאלית. סימטריות ע"י ההעתקה ההפוכה. טרנזיטיביות ע"י הרכבת ההעתקות.

(ב) הראו שאם α חלקה אז גם β חלקה.

פתרון 5. נרשום $\beta = \alpha \circ \gamma$ עבור γ פו' שמגדירה שקילות אזי

$$\beta_i' \left(t\right) = \frac{d}{dt} \alpha_i \circ \gamma_i = \alpha' \left(\gamma_i \left(t\right)\right) \cdot \gamma_i' \left(t\right)$$

אבל $\gamma' \left(t\right) > 0$ וכן α חלקה כלומר לכל s בפרט עבור $s = \gamma \left(t\right)$ מתקיים כי $\alpha' \left(s\right) \neq 0$ ומכאן מקבלים את החלקות המבוקשת.

4. תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ עולה וגזירה ברציפות. נתבונן במשולש ישר הזווית שקודקודיו בנקודות $(0, f(0)), (1, f(1)), (1, f(0))$.אם c הוא אורך היתר וa,b אורכי הניצבים הראו כי $c \leq L\left(f\right) \leq a+b$.

פתרון 6. שמים לב כי $\sqrt{A+B} \leq \sqrt{A} + \sqrt{B}$ ומכאן

$$L\left(f\right) \leq \int_0^1 \sqrt{1 + f'\left(t\right)^2} st \leq \int_0^1 1 dt + \int_0^1 f'\left(t\right) dt = 1 + f\left(1\right) - f\left(0\right) = a + b.$$

בכיוון השני שמים לב כי קווים ישרים נותים מינימום לאינטגרל מעלה ולכן בפרט $c \leq L\left(f\right)$. אפשר להראות זאת באופן מיידי גם ע"י אי"ש ינסן עליו דיברתם בהסתברות.

2.1 להעמקה

1. תהי $\gamma : [a,b] \to [0,1]^2$ עקומה כך ש$(\mathbb{Q} \cap [0,1])^2 \subseteq \gamma\left([a,b]\right)$. הראו כי בהכרח איננה חלקה.[2]

פתרון

נתון כי γ חלקה. בפרט, הפונקציה $\|\gamma'\left(s\right)\|$ היא פונקציה רציפה על הקטע הקומפקטי $[0,1]$ ולכן היא חסומה, כלומר קיים $M \geq 0$ כך שלכל $s \in [0,1]$ מתקיים $\|\gamma'\left(s\right)\| \leq M$. מכאן:

$$L\left(\gamma\right) = \int_0^1 \|\gamma'\left(s\right)\| \mathrm{d}s \leq M$$

כלומר העקומה היא מאורך סופי.

כעת, עבור $n \in \mathbb{N}$ נחלק את הריבוע $[0,1] \times [0,1]$ ל-n^2 ריבועים שקודקודיהם הם הנקודות:

$$\left\{ \left(\frac{k}{n}, \frac{m}{n}\right), 0 \leq k, m \leq n \right\}$$

נשים לב כי המרחק המינימלי בין כל זוג קודקודים הוא $\frac{1}{n}$, ויש $(n+1)^2$ קודקודים בסה"כ. נניח בשלילה כי $\gamma\left([0,1]\right) \supseteq [0,1] \times [0,1]$, אז העקומה עוברת דרך כל אחד מהקודקודים נסמן ב-$[0,1] \supseteq \{s_k\}_{k=1}^{(n+1)^2}$ את כל

[2] רמז: חלקו את הריבוע לתתי-ריבועים שצלען $\frac{1}{n}$ והסיקו מכך כי העקומה חסרת אורך.

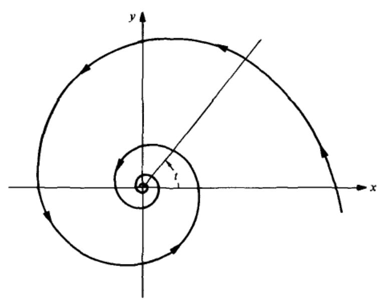
המספרים שעבורם $\gamma(s_k)$ הוא קודקוד, ונסדר אותם כך ש-$s_i < s_j$ עבור $i < j$. אז מתקיים:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\geq \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} L\left(\gamma\Big|_{[s_k,s_{k+1}]}\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} d\left(\gamma(s_k),\gamma(s_{k+1})\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{n} \\ &= \frac{(n+1)^2-1}{n} \\ &= \frac{n^2+2n}{n} \\ &= n+2 \end{aligned}$$

כאשר $n \to \infty$ נגלה כי אורך העקומה הוא אינסופי, ובפרט הוא גדול מ-M, בסתירה. $\square$

2. הוכח/הפרך: לעקומה חלקה $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ אין אורך (כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} \|\gamma'(t)\| dt = \infty$).

פתרון 7. נתבונן בעקומה הבאה



פרמרטיזציה היא למשל

$$\gamma(t) = \left(e^{bt}\cos at, e^{bt}\sin at\right)$$

ואז האורך הוא סופי כמובן

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{\left(be^{bt}\cos at - ae^{bt}\sin at\right)^2 + \left(be^{bt}\sin at + ae^{bt}\cos at\right)^2} dt &= \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{b^2e^{2bt}+a^2e^{2bt}} \\ &\leq \max\{|a|,|b|\} \int_{t_0}^{\infty} e^{bt} dt \\ &< \infty \end{aligned}$$