חורף תשע"ד

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 11: אפסים של פונקציה אנליטית

1. משפט:

אם $\{z_n\} \subset D$ סדרה מתכנסת ל $z_0 \in D$ ואם

$f(z_n) = 0,\ \ n = 1, 2, 3...$ כאשר $f(z)$ אנליטית ב D אז $f \equiv 0$ ב D.

מסקנה:

לפונקציה $f(z)$ שונה זהותית מאפס ואנליטית ב D יש לכל היותר מספר סופי של אפסים ב D.

(א) הוכיחו כי אם $f(z)$ אנליטית ואינה קבועה בתחום פשוט קשר D, אזי כל קו סגור Γ הנמצא ב D עוקף רק מספר סופי של פתרונות של המשוואה $f(z) = a$.

נסמן $g = f - a$. אזי g אנליטית ואינה קבועה ב D. על פי המסקנה ל g מספר סופי של אפסים (פתרונות המשוואה $f = a$) ב D וסיימנו.

(ב) הוכיחו כי אם פונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום D ומתאפסת בעיגול פתוח ב D $B(z_0, r) = \{z \in D : |z - z_0| < r\}$, אזי $f(z) \equiv 0$ ב D.

נבחר נקודה z_1 על שפת B וסדרה $\{z_n\} \subset B$ מתכנסת ל z_1. מצאנו סדרה מתכנסת וגבול ב D כך ש $f(z_n) = 0,\ \ n = 1, 2, 3...$. לכן על פי המשפט $f(z) \equiv 0$ ב D.

2. הוכיחו כי אם $z = z_0$ אפס מסדר n של פונקציה $f(z)$, אזי הוא אפס מסדר $2n$ של $f^2(z)$.

נרשום $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$ כאשר $\varphi(z)$ אנליטית ב z_0 ו $\varphi(z_0) \neq 0$. על כן ניתן לרשום $f^2(z) = (z - z_0)^{2n} \varphi^2(z)$. ברור ש $\varphi^2(z)$ אנליטית ב z_0 ו $\varphi^2(z_0) \neq 0$. לכן z_0 אפס מסדר $2n$ של $f^2(z)$.