תרגיל 2 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה $z=0$ ומצאו אותו אם הוא קיים:

   (א) $\frac{\overline{z}}{z}-\frac{z}{\overline{z}}$.

   (ב) $\frac{\mathrm{Im}(z)}{\overline{z}}$.

2. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות/אנליטיות:

   (א) $f(z)=x^3+iy^3$

   (ב) $f(z)=z+\mathrm{Re}(z)$

   (ג) $f(z)=x^3+y^5$

3. מצאו את כל הנקודות $z\in\mathbb{C}$ שבהן $f(z)=\overline{z}e^{-17z^2}$ גזירה.

4. תהי $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ לפי

$$f(z)=u(x+y)-iu(x-y)$$

   הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x)

5. מצאו פונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$.
   רמז: אם $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ אפשר לנסות לחפש u,v מהצורה

$$u(x,y)=u_1(x)+u_2(y),\quad v(x,y)=v_1(x)+v_2(y)$$

6. תהי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2-v^2=c$$

   כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.
   רמז: הגדירו $g(z)=(f(z))^2$

7. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z\mid |z|<R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\overline{z})}$ גזירה שם.