פיתרון תרגיל בית 6 במתמטיקה בדידה 2

83-118 סמסטר ב' תשע"ט

1. נחשב את הפיתוח לטור חזקות של $(1-x)^{-k}$:

(א) הוכיחו: $\left((1-x)^{-1}\right)^{(k-1)} = (k-1)!(1-x)^{-k}$, כאשר $(f(x))^{(k)}$ מסמן את הנגזרת מסדר k של $f(x)$. (רמז: אינדוקציה)

(ב) הוכיחו: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!}x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{(k-1)}$. (רמז: אינדוקציה)

(ג) כמסקנה משני הסעיפים הקודמים, מצאו את הפיתוח לטור חזקות של $(1-x)^{-k}$.

<u>**פתרון:**</u>

א. בסיס: עבור $k=2$, מדובר בנגזרת הראשונה, ואכן $\left((1-x)^{-1}\right)' = (1-x)^{-2}$. נניח נכונות עבור $k-1$ ונוכיח עבור k: כלומר, לפי הנחת האינדוקציה מתקיים: $\left((1-x)^{-1}\right)^{(k-2)} = (k-2)!(1-x)^{-(k-1)}$, ולכן נקבל:

$$\left((1-x)^{-1}\right)^{(k-1)} = \left((k-2)!(1-x)^{-(k-1)}\right)' = -(k-1)\cdot(k-2)!(1-x)^{-k}\cdot(-1) = (k-1)!(1-x)^{-k}$$

ב. בסיס: עבור $k=2$, מדובר בנגזרת הראשונה, ואכן

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2-1)!}{n!}x^n$$

נניח נכונות עבור $k-1$ ונוכיח עבור k. כלומר, לפי הנחת האינדוקציה מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-2)!}{n!}x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{(k-2)}$, ולכן נקבל:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{(k-1)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-2)!}{n!}x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(n+k-2)!}{n!}x^{n-1} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(n+k-2)!}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{(n+1+k-2)!}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!}x^n$$

ג. נקבל:

$$(1-x)^{-k} \overset{*}{=} \frac{1}{(k-1)!}\left((1-x)^{-1}\right)^{(k-1)} \overset{\text{✡}}{=} \frac{1}{(k-1)!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{(k-1)} \overset{**}{=} \frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n$$

כאשר שיוויון $*$ נובע מסעיף א, שיוויון $**$ מסעיף ב, ושיוויון ✡ נובע מהעובדה שראיתם בהרצאה ש־ $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

2. כמה מספרים, בעלי n ספרות עשרוניות לכל היותר, הם בעלי סכום ספרות 16?

פתרון:

כל מספר בעל n ספרות לכל היותר ניתן לייצוג כמספר בעל n ספרות בדיוק, כאשר מותר גם לספרות השמאליות להיות 0 (לדוגמא, עבור $n=4$ המספר 3 הוא 0003). לכן אנחנו רוצים לדעת כמה פתרונות יש למשוואה $\sum_{i=1}^{n} a_i = 16$, כאשר לכל $1 \le i \le n$ מתקיים: $0 \le a_i \le 9$ שלם (כיון שמדובר בספרות מוכרח שזה יהיה קטן מ או שווה ל־ 9). הפונקציה היוצרת המתאימה לכל ספרה היא $(1+x+x^2+\ldots+x^9)$, ולכן הפונקציה היוצרת הכללית שאנו מקבלים היא $\left(\sum_{k=0}^{9} x^k\right)^n$, ואנחנו מחפשים את המקדם של x^{16} בפונקציה זו. נפתח אותה לטור חזקות:

$$\left(\sum_{k=0}^{9} x^k\right)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=10}^{\infty} x^k\right)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+10}\right)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k - x^{10}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^n$$

כעת נוכל להוציא גורם משותף ולקבל:

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\cdot\left(1-x^{10}\right)\right)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^n \left(1-x^{10}\right)^n$$

לפי שאלה 1 נקבל (שימו לב שהאותיות k,n התחלפו בתפקידים): $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^n = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}x^k$, ובנוסף לפי הבינום נקבל: $\left(1-x^{10}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{10k}$. בסה"כ, אנחנו מחפשים את המקדם של x^{16} במכפלה

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{10k}\right)$$

כעת נשים לב שמהחלק הימני החזקה היא כפולות של 10, ולכן ניתן לקחת משם רק את x^0, x^{10}.

אם לוקחים משם את x^0, אז מהטור השמאלי לוקחים את x^{16}, ומכפלת המקדמים היא: $\binom{n}{0}(-1)^0\cdot\binom{16+n-1}{16} = \binom{n+15}{16}$.

אם לוקחים מהימני את x^{10}, אז מהטור השמאלי לוקחים את x^6, ומכפלת המקדמים היא: $\binom{n}{1}(-1)^1\cdot\binom{6+n-1}{6} = -n\binom{n+5}{6}$.

ביחד, המקדם של x^{16} בפונקציה היוצרת הוא $\binom{n+15}{16} - n\binom{n+5}{6}$.

3. מטילים קוביה 10 פעמים בזו אחר זו. בכמה מהפעמים סכום התוצאות הוא 20?

פתרון:

פונקציה יוצרת של הטלת קוביה היא $(x+x^2+\ldots x^6)$, ולכן הפונקציה היוצרת המתאימה לשאלה זו היא $=(x+x^2+\ldots+x^6)^{10}$ $\left(x(1+\ldots+x^5)\right)^{10}=x^{10}(1+\ldots+x^5)^{10}$, ואנחנו מחפשים את המקדם של x^{20}, שזה כמו לחשב את המקדם של x^{10} בפיתוח של $(1+\ldots+x^5)^{10}$ לטור חזקות.

נחשב את הפיתוח לטור חזקות של $(1+\ldots+x^5)^{10}$:

$$(1+x^2+\ldots+x^5)^{10}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=6}^{\infty}x^n\right)^{10}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n-x^6\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^{10}=\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)(1-x^6)\right)^{10}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^{10}(1-x^6)^{10}$$

לפי שאלה 1 נקבל: $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^{10}=(1-x)^{-10}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+10-1}{n}x^n$, ובנוסף מהבינום נקבל: $(1-x^6)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-1)^kx^{6k}$.

סה"כ, אנחנו מחפשים את המקדם של x^{10} במכפלה

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+10-1}{n}x^n\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-1)^kx^{6k}\right)$$

כעת נשים לב שמהחלק הימני החזקה היא כפולות של 6, ולכן ניתן לקחת משם רק את x^0,x^6.

אם לוקחים משם את x^0, אז מהחלק השמאלי לוקחים את x^{10}, ולכן מכפלת המקדמים היא: $\left(\binom{10}{0}(-1)^0\right)\cdot\left(\binom{10+10-1}{10}\right)=\binom{19}{10}$.

אם לוקחים משם את x^6, אז מהחלק השמאלי לוקחים את x^4, ולכן מכפלת המקדמים היא: $\left(\binom{10}{1}(-1)^1\right)\cdot\left(\binom{4+10-1}{4}\right)=$ $-10\cdot\binom{13}{4}$.

ביחד, המקדם של x^{10} בפונקציה היוצרת הוא: $\binom{19}{10}-10\binom{13}{4}$.

4. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+x_3=15$, כאשר: $\forall 1\le i\le 3: x_i\in\mathbb{Z}\wedge i\le x_i\le i+5$?

<u>**פתרון:**</u>

נשתמש בפונקציה יוצרת לכל משתנה:

עבור x_1 נקבל: $(x+\ldots+x^6)=x(1+\ldots+x^5)$.

עבור x_2 נקבל: $(x^2+\ldots+x^7)=x^2(1+\ldots+x^5)$.

עבור x_3 נקבל: $(x^3+\ldots+x^8)=x^3(1+\ldots+x^5)$.

אנחנו מחפשים את המקדם של x^{15} במכפלת הפונקציות הנ"ל: $x^6(1+\ldots+x^5)^3$, שזה כמו המקדם של x^9 של $(1+\ldots+x^5)^3$.
בדומה מאד לתרגיל קודם נקבל:

$$(1+\ldots+x^5)^3=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^3(1-x^6)^3=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3-1}{n}x^n\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(-1)^kx^{6k}\right)$$

כעת נשים לב שמהחלק הימני החזקה היא כפולות של 6, ולכן ניתן לקחת משם רק את x^0,x^6.

אם לוקחים משם את x^0, אז מהחלק השמאלי לוקחים את x^9, ולכן מכפלת המקדמים היא: $\left(\binom{3}{0}(-1)^0\right)\cdot\left(\binom{9+3-1}{9}\right)=\binom{11}{9}$.

אם לוקחים משם את x^6, אז מהחלק השמאלי לוקחים את x^3, ולכן מכפלת המקדמים היא: $\left(\binom{3}{1}(-1)^1\right)\cdot\left(\binom{3+3-1}{3}\right)=-3\cdot\binom{5}{3}$.

ביחד, המקדם של x^9 בפונקציה היוצרת הוא: $\binom{11}{9}-3\binom{5}{3}=55-30=25$.

5. מצאו את הפיתוח לטור חזקות של $\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$.

<u>פתרון:</u>

כדי לפתח לטור חזקות, נמצא את הפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} = \frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}+\frac{C}{1-3x} = \frac{A(1-2x)(1-3x)+B(1-x)(1-3x)+C(1-x)(1-2x)}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} =$$

$$\frac{A+B+C+x(-5A-4B-3C)+x^2(6A+3B+2C)}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$$

ולכן, $1 = A+B+C+x(-5A-4B-3C)+x^2(6A+3B+2C)$, ונקבל את מערכת המשוואות (מהשוואת מקדמים של x^0, x^1, x^2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0.5 \\ & 1 & & -4 \\ & & 1 & 4.5 \end{array}\right)$$

כלומר: $A = 0.5, B = -4, C = 4.5$. ולכן:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} = \frac{0.5}{1-x} - \frac{4}{1-2x} + \frac{4.5}{1-3x}$$

כעת נוכל להשתמש בטורים ידועים: $\frac{0.5}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5x^n$.

נסמן $y = 2x$ ונקבל: $\frac{4}{1-2x} = \frac{4}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} 4y^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2}x^n$, ובדומה נקבל: $\frac{4.5}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2}x^n$. ולכן בסה"כ:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + 2^{n+2} + \frac{3^{n+2}}{2}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}+3^{n+2}}{2} x^n$$