אנליזה למורים תרגיל 9 ־פתרון

16 ביוני 2018

שאלה 1

חשבו את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

א) $\int x^2 ln(x^2+x+1)dx = \frac{x^3}{3}\cdot ln(x^2+x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{2x^4+x^3}{x^2+x+1}dx$

הסבר: נבצע אינטגרציה בחלקים:

$f^{'} = x^2, g = ln(x^2+x+1)$ ולכן $f = \frac{x^3}{3}$, $g^{'} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

כדי לחשב את האיטגרל שמימין נעשב חילוק ארוך ונקבל:

$\frac{2x^4+x^3}{x^2+x+1} = \frac{\left(2x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)+1}{x^2+x+1} = 2x^2-x+1+\frac{1}{x^2+x+1}$

נחזור לשאלה:

$\frac{x^3}{3}ln(x^2+x+1) - \frac{1}{3}\left(\int(2x^2-x+1)dx + \int\frac{dx}{x^2+x+1}\right) = \frac{x^3}{3}ln(x^2+x+1) -$
$\frac{1}{3}(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$
$= \frac{x^3}{3}ln(x^2+x+1) - \frac{2}{9}x^3 - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} - \frac{4}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)) + C$

ב) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

נציב $t^2 = e^x - 1$ ולכן $t^2+1 = e^x$ ולכן $x = ln(t^2+1)$

$dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$

ולכן נקבל את האיטגרל הבא:

$\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt = 2arctan(t) + C = 2arctan(\sqrt{e^x-1}) + C$

שאלה 2

מצא את כל האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

א) $f(x) = \frac{ln(1+x)}{x^2}$

פתרון:

הפונקציה לא מוגדרת כאשר $x=0$ וכאשר $x=-1$.

$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x^2} = \infty$ ולכן ב־$x=0$ עוברת אסימפטוטה אנכית

$\lim_{x\to -1}\frac{ln(1+x)}{x^2} = -\infty$ ולכן ב־$x=-1$ גם עוברת אסימפוטה אנכית

מחשב אסימפטוטה משופעת:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{ln(1+x)}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+x)}{x^3} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+x)}{x^2} = 0$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב־∞ אבל יש אסימפטוטה אופכית והיא ציר ה־x

באותו אופן אפשר להראות שציר ה־x הוא אסימפטוטה אופכית ב־$-\infty$.

ב) $g(x) = \frac{x}{e^x-1}$

פתרון:

הפונקציה לא מוגדרת כאשר $e^x = 1$ כלומר כאשר $x = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ ולכן הפונקציה חסומה בסביבה של הנקודה ולכן אין אסימפטוטה אנכית ב־$x = 0$.

נמצא אסימפטוטה משופעה ב־$-\infty$:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x - 1} = 0$$

ולכן ציר ה־x הוא אסימפטוטה אופכית ב־∞.

נמצא אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$:

$$a = \lim_{x\to -\infty} \frac{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^x - 1} + x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x + xe^x - x}{e^x - 1} = 0$$

ולכן אסימפוטה משופעת ב־$-\infty$ היא $y = -x$.

שאלה 3

חשב את הגבולות של הפונקציות הבאות:

א) $\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x cos(\frac{1}{t})dt}{x}$

פתרון: