תרגיל 13 (כולל פתרונות)

- תזכורת (קירוב ליניארי): $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ כאשר x קרוב ל x_0

שאלה 1

תעריכו לפי הקירובים הליניאריים את הערכים הבאים:

a. $\arctan(1.01)$ (זכרו כי $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$)

פתרון: מכיוון ש $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ נובע לפי הגדרה ש $tg\frac{\pi}{4}=1$ ולכן $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. לכן נבחר $x_0=1$ ולכן לפי הנוסחא לעיל

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=\arctan(x_0)+\frac{1}{1+x_0{}^2}(x-x_0)$$ כלומר

$$\arctan(1.01)\approx\arctan(x_0)+\frac{1}{1+x_0{}^2}(x-x_0)=$$

$$=\arctan(1)+\frac{1}{1+1^2}(1.01-1)=\frac{\pi}{4}+0.005=0.7903981...$$

ובמציאות (במחשבון)

$$\arctan(1.01)=0.7903732...$$

b. $(2.01)^{2\cos\ln(1.01)}$

פתרון: נבחר $x_0=1$, $f(x)=(1+x)^{2\cos(\ln(x))}$. לכן

$$f'(x)=(1+x)^{2\cos(\ln(x))}\left(2\cos(\ln(x))\ln(1+x)\right)'=$$

$$=(1+x)^{2\cos(\ln(x))}\left(\frac{-2\sin(\ln x)\ln(1+x)}{x}+\frac{2\cos(\ln(x))}{1+x}\right)$$

לכן $f(1)=(1+1)^{2\cos(\ln 1)}=2^2=4$, $f'(1)=4\left(0+\frac{2}{2}\right)=4$ ביחד:

$$(2.01)^{2\cos\ln(1.01)}=f(1.01)\approx f(1)+f'(1)(0.01)=4+0.04=4.04$$

ובמציאות (במחשבון) $(2.01)^{2\cos\ln(1.01)}=4.03982...$

שאלה 2

חשבו את הגבולות:

a. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}, k\in\mathbb{N}$

פתרון:
נוכיח באינדוקציה שהגבול הנ"ל הינו אפס. טריוויאלי עבור $k=0$. נניח נכון עבור $k-1$ ונוכיח עבור k :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^k\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{kx^{k-1}}{e^x}=k\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k-1}}{e^x}=0$$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$

פתרון:
$\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)}$. כעת $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}=$. כעת המונה והמכנה שואפים לאינסוף ולכן ניתן ולהפעיל לופיטל, וזה שווה:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5}=3$$

ולכן הגבול כולו שווה ל e^3

c. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)}$

פתרון:
המכנה והמונה שואפים לאפס, לכן נפעיל לופיטל

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin(x^2)}{2x\sin(x^2)+x^2 2x\cos(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{\sin(x^2)+x^2\cos(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{2x\cos(x^2)+2x\cos(x^2)-x^2 2x\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)}{\cos(x^2)+\cos(x^2)-x^2\sin(x^2)}=\frac{1}{2}$$

.d $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$$

שאלה 3

מצאו פונקציה $f(x)$ מוגדרת על $\mathbb{R}$ כך ש-

$$f(3)=2,\ f'(3)=5,\ f''(3)=-4,\ f'''(3)=7,\ f^{(4)}(3)=-1,\ f^{(5)}(3)=6$$

פתרון:

נבחר את f להיות פולינום שגזיר אינסוף פעמים מעצם היותו פולינום. אם היינו מפתחים את f מסביב לנקודה 3, אז פולינופם טיילור מסדר 5 היה נראה כך:

$$f(3)+\frac{f'(3)}{1!}(x-3)+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+$$
$$+\frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3+\frac{f^{(4)}(3)}{4!}(x-3)^4+\frac{f^{(5)}(3)}{5!}(x-3)^5$$

זהו פולינום ממעלה 5, ואם ניקח אותו בתור הפונקציה ברור שהנגזרות מסר 6 ומעלה מתאפסות זהותית (כי זה פולינום מסדר 5). כעת, נציב את המספרים הנתונים ונקבל:

$$f(x)=2+\frac{5}{1!}(x-3)+\frac{-4}{2!}(x-3)^2+$$
$$+\frac{7}{3!}(x-3)^3+\frac{-1}{4!}(x-3)^4+\frac{6}{5!}(x-3)^5$$

או:

$$f(x)=2+5(x-3)-2(x-3)^2+$$
$$+\frac{7}{6}(x-3)^3-\frac{1}{24}(x-3)^4+\frac{1}{20}(x-3)^5$$