אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרונות לתרגיל 5

1. האם $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $span \ni \begin{pmatrix}-4\\5\\-2\end{pmatrix}$? אם כן, הציגו אותו כצירוף לינארי של הוקטורים בקבוצה.

פתרון:
צריך לבדוק אם יש פתרון למערכת

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-4\\2&2&1&5\\1&3&0&-2\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&5\end{pmatrix}$$

אין פה שורות סתירה ולכן קיים פתרון- ולכן הוקטור הוא אכן צ"ל של הוקטורים מהקבוצה.

הפתרון של המערכת (פתרון יחיד במקרה זה) הוא $\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$ ולכן הצ"ל הוא

$$\begin{pmatrix}-4\\5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

2. האם $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$ $span \ni \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$? אם כן, הציגו אותו כצירוף לינארי של הוקטורים בקבוצה.

פתרון:
צריך לבדוק אם יש פתרון למערכת

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&2&1\\3&0&2\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

יש פה שורת סתירה ולכן לא קיים פיתרון- ולכן הוקטור הנתון הוא לא צ"ל של הוקטורים בקבוצה.

3. האם $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}\right\}$ $span \ni \begin{pmatrix}-1\\4\\9\end{pmatrix}$? אם כן, הציגו אותו כצירוף לינארי של הוקטורים בקבוצה.

פתרון:
נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

אין שורת סתירה ולכן יש פתרון, ולכן הוקטור הוא צ"ל.
נקח פתרון של המערכת: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אזי

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

.

4. הציגו את וקטור האפס כצירוף לא טריוויאלי של $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:
זה בעצם למצוא פתרון לא טריוויאלי למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$, פתרון לא טריויאלי הוא למשל $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ מה שאומר ש־

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וזהו צ"ל לא טריוויאלי.

5. הוכיחו או הפריכו: $\mathbb{R}^3 = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:
נקח וקטור כללי מ־$\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ונבדוק אם הוא צ"ל של הוקטורים שמצד שמאל.

כלומר שצריך לבדוק אם יש פתרון למערכת $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & a \\ 2 & 5 & 8 & b \\ 3 & 6 & 9 & c \end{pmatrix}$. נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & a \\ 2 & 5 & 8 & b \\ 3 & 6 & 9 & c \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & a \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2a-b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2b-a-c}{6} \end{pmatrix}$$

.

אפשר לראות מהשורה האחרונה שיכולה להיות שורת סתירה (תלוי בערכים של a, b, c)־ ולכן **לא** לכל וקטור יהיה פתרון־ ולכן הקבוצה היא **לא** פורשת.

6. הוכיחו או הפריכו: $\mathbb{R}^3 = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

פתרון:

נקח וקטור כללי מ־$\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ונבדוק אם הוא צ"ל של הוקטורים שמצד שמאל.

כלומר שצריך לבדוק אם יש פתרון למערכת $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \end{pmatrix}$. נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & a+c-b \end{pmatrix}$$

.

אפשר לראות שאף פעם אין שורת סתירה־ ולכן לכל וקטור יהיה פתרון־ ולכן הקבוצה היא פורשת.

7. הוכיחו כי $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא קבוצה פורשת למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

פתרון:

נפתור את המערכת ההומוגנית הנתונה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} -2s \\ t-s \\ s \\ t \end{pmatrix}$. ולכן מרחב כל הפתרונות של המערכת הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} \,|\, t,s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,|\, t,s \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(השיוויון האחרון הוא ממש לפי ההגדרה של המרחב הנפרש).