תרגיל 4

.1

(א) הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/{\langle x^2 \rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/{\langle x^2-1 \rangle}$$

(ב) הוכיחו שהחוגים הבאים **לא** איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{Q}[x]}/{\langle x^2 \rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{Q}[x]}/{\langle x^2-1 \rangle}$$

(ג) הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/{\langle xy-1 \rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/{\langle x^2+y^2-1 \rangle}$$

פתרון.

i. נשים לב שיש איזומורפיזם $\varphi : \mathbb{F}_2[x] \to \mathbb{F}_2[x]$ לפי $\varphi(f(x)) = f(x+1)$. מתקיים $\varphi(x^2) = (x+1)^2 = x^2 - 1$ (כי אנחנו עובדים במאפיין 2), ולכן גם $\varphi(\langle x^2 \rangle) = \langle x^2 - 1 \rangle$. זה משרה איזומורפיזם ${}^{\mathbb{F}_2[x]}/{\langle x^2 \rangle} \cong {}^{\varphi(\mathbb{F}_2[x])}/{\varphi(\langle x^2 \rangle)} = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/{\langle x^2-1 \rangle}$ (המעברים לא היו נכונים אם φ לא היה איזומורפיזם).

ii. לפי משפט השאריות הסיני, כיוון שהאידאלים $\langle x+1 \rangle$ ו-$\langle x-1 \rangle$ קו-מקסימליים, מתקיים

$$S = {}^{\mathbb{Q}[x]}/{\langle x^2-1 \rangle} = {}^{\mathbb{Q}[x]}/{\langle (x+1)(x-1) \rangle} \cong {}^{\mathbb{Q}[x]}/{\langle x+1 \rangle} \times {}^{\mathbb{Q}[x]}/{\langle x-1 \rangle} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

כשהמעבר האחרון מסתמך על הומומורפיזם ההצבה שראינו בתרגול. לכן ב-S אין איברים נילפוטנטים (ודאו!). מצד שני, ב-R האיבר $x + \langle x^2 \rangle$ הוא נילפוטנטי מסדר 2, ולכן R ו-S לא איזומורפיים.

iii. נשים לב כי $x^2 + y^2 - 1 = (x+iy)(x-iy) - 1$. לכן נגדיר הומומורפיזם $\varphi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ לפי $\varphi(f(x,y)) = f(x+iy, x-iy)$. ודאו שאתם מבינים מדוע φ הומומורפיזם. נראה ש-φ איזומורפיזם על ידי כך שנמצא את ההופכי שלו: $\psi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ המוגדר לפי $\psi(g(x,y)) =$

זה אכן הומומורפיזם. כדי להראות ש- $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi =$ $g\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2i}\right)$. $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}[x,y]}$, מספיק לבדוק שזה מתקיים על היוצרים x ו-y. אכן,

$$\varphi(\psi(x)) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+iy+x-iy}{2} = x$$
$$\psi(\varphi(x)) = \psi(x+iy) = \frac{x+iy}{2} + i\cdot\frac{x-iy}{2i} = x$$
$$\varphi(\psi(y)) = \varphi\left(\frac{x-y}{2i}\right) = \frac{x+iy-x+iy}{2i} = y$$
$$\psi(\varphi(y)) = \psi(x-iy) = \frac{x+y}{2} - i\cdot\frac{x-y}{2i} = y$$

זה מראה ש-φ איזומורפיזם. כעת נשים לב כי

$$\varphi(xy-1) = (x+iy)(x-iy) - 1 = x^2+y^2-1$$

ולכן $\varphi(\langle xy-1\rangle) = \langle x^2+y^2-1\rangle$. כמו בסעיף הראשון, זה מראה ששני החוגים איזומורפיים.

2. אינו שעבור קבוצה X, אז $(P(X), \triangle, \cap)$ הוא חוג בוליאני. בתרגיל בית 1 הוכחתם שכל חוג בוליאני הוא חילופי. ננסה להוכיח את הכיוון ההפוך: כל חוג בוליאני A משוכן בחוג מן הצורה $(P(X), \triangle, \cap)$.

(א) הוכיחו שלכל $a \in A$ מתקיים $a + a = 0$ (ובפרט המאפיין של A הוא 2).

(ב) הוכיחו שהשדה היחיד שהוא גם חוג בוליאני הוא $\mathbb{F}_2$.

(ג) הוכיחו שלכל אידאל מקסימלי $M \lhd A$ מתקיים $A/M \cong \mathbb{F}_2$.

(ד) יהי $M \lhd A$ אידאל מקסימלי ויהי $a \in A$. הוכיחו כי $a \in M$ או $1-a \in M$, אבל לא שניהם.

(ה) יהי $0 \neq a \in A$. הוכיחו שקיים אידאל מקסימלי $M \lhd A$ שאינו מכיל את a.

(ו) תהי X קבוצת כל האידאלים המקסימליים של A. הוכיחו שההעתקה $\varphi\colon A \to (P(X), \triangle, \cap)$ השולחת איבר $a \in A$ לקבוצת כל האידאלים המקסימליים שלא מכילים אותו היא שיכון של חוגים.

i. יהי $a \in A$. כיוון ש-A חוג בוליאני, $a^2 = a$ וגם

$$a+1 = (a+1)^2 = a^2+2a+1 = 3a+1$$

ולכן $2a = 0$.

אי. יהי F שדה שהוא חוג בוליאני, ויהי $x \in F$. לכן $x^2 = x$, כלומר $x(x-1) = 0$, אבל בשדה אין מחלקי אפס ולכן $x = 0$ או $x = 1$. זה מראה שהאופציה היחידה היא $F = \mathbb{F}_2$.

בי. יהי M אידאל מקסימלי של A. לפי משפט, A/M הוא שדה. כמו כן, הוא גם חוג בוליאני כי לכל $a + M \in A/M$,

$$(a+M)^2 = a^2 + M = a + M\ .$$

לפי הסעיף הקודם, $A/M \cong \mathbb{F}_2$.

ג'. נניח כי $a \notin M$. נתבונן בחוג המנה A/M. מהסעיף הקודם, $A/M \cong \mathbb{F}_2$, ולכן יש בו רק שני איברים – $A/M = \{0+M, 1+M\}$. $a \notin M$ אומר ש-$a+M = 1+M$, אבל אז $(1-a)+M = 0+M$, ולכן $1-a \in M$.

ד'. יהי $0 \neq a \in A$. האיבר היחיד ב-A שהוא הפיך הוא 1 (כי אם $x \in A$ הפיך אז $x^2 = x$ גורר ש-$x = 1$). לכן $1 - a$ אינו איבר הפיך ב-A. לפי משפט, יש אידאל מקסימלי M שמכיל אותו. אבל אז לא יכול להיות ש-$a \in M$, אחרת $1 = (1-a) + a \in M$.

ה'. צריך להוכיח ש-φ הומומורפיזם וגם חח"ע.

- φ מכבדת חיבור: יהיו $a, a' \in A$. רוצים להוכיח כי $\varphi(a+a') = \varphi(a) \triangle \varphi(a')$. אכן, $\varphi(a+a')$ מכיל את כל האידאלים המקסימליים של A שאינם מכילים את $a+a'$. אם אידאל מכיל את a ואת a', ודאי שהוא מכיל את $a+a'$; אם הוא לא מכיל את a ולא את a', לפי סעיף ד' הוא מכיל את $1-a$ ואת $1-a'$ ולכן גם את $(1-a)+(1-a') = a+a'$; ושכנעו את עצמכם שאם הוא מכיל בדיוק אחד ולא את השני אז הוא לא מכיל את הסכום.
- φ מכבדת כפל: יהיו $a, a' \in A$. רוצים להוכיח כי $\varphi(aa') = \varphi(a) \cap \varphi(a')$. כל אידאל מקסימלי שלא מכיל את a ולא את a' לא יכיל גם את aa' (כי הוא ראשוני); מצד שני, כל אידאל מקסימלי שלא מכיל את aa' לא יכיל לא את a ולא את a' (מהבליעה של אידאל).
- $\varphi(1) = P(X)$: כל אידאל מקסימלי של X לא מכיל את 1.

נותר להוכיח ש-φ חח"ע. יהי $a \in A$ עם $\varphi(a) = 0$. זה מראה שכל אידאל מקסימלי מכיל את a. אבל אם $a \neq 0$, $1-a$ לא הפיך ב-A, ולכן יש אידאל מקסימלי שמכיל אותו, בסתירה.

3. יהי R חוג.

(א) יהיו $I, J \lhd R$ קו־מקסימליים. הוכיחו כי $I \cap J = IJ + JI$. (ממסקנה: בחוג קומוטטיבי נקבל $I \cap J = IJ$)

(ב) יהיו $I, J, K \lhd R$ כך ש-I, K קו־מקסימליים וגם J, K קו־מקסימליים. הראו כי גם IJ, K קו־מקסימליים.

(ג) הוכיחו באמצעות אינדוקציה על n את משפט השאריות הסיני ל-n אידאלים: יהי R חוג, ויהיו $I_1, \ldots, I_n \lhd R$ אידאלים קו־מקסימליים בזוגות. אזי

$$R/I_1 \cap \cdots \cap I_n \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n.$$

הסיקו שעבור חוג חילופי R ואידאלים כנ"ל מתקיים

$$R/I_1 \cdots I_n \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n.$$

הוכחה.

1. $\boxed{\supseteq}$ $IJ, JI \subseteq I \cap J$, ולכן $IJ + JI \subseteq I \cap J$.

$\boxed{\subseteq}$ לפי הנתון קיימים $x \in I$ ו-$y \in J$ כך ש-$x + y = 1$. יהי $z \in I \cap J$. לכן

$$z = z \cdot 1 = z(x+y) = zx + zy.$$

כעת $z \in I \cap J \subseteq I$, לכן $zy \in IJ$, ומצד שני $z \in I \cap J \subseteq J$ ולכן $zx \in JI$. זה מראה $z \in IJ + JI$.

2. לפי הנתון $I + K = J + K = R$. לכן קיימים $x \in I$, $y \in J$ ו-$z, z' \in K$ כך ש-$x + z = 1 = y + z'$. לכן $1 = (x+z)(y+z') = xy + (xz' + zy + zz')$. לפי ההגדרה $xy \in IJ$, וכיוון ש-K הוא אידאל מתקיים $xz' + zy + zz' \in K$. לכן IJ, K הם קו־מקסימליים.

3. עבור $n = 2$ זהו משפט השאריות הסיני שהוכחתם בהרצאה. נניח כי הטענה נכונה עבור n כלשהו, ונוכיח עבור $n+1$. יהיו $I_1, \dots, I_{n+1}$ אידאלים קו־מקסימליים בזוגות. אם נשתמש בסעיף הקודם על $I_1, \dots, I_n$ ביחס ל-I_{n+1}, נקבל ש-$I_1 \dots I_n$ ו-I_{n+1} הם קו־מקסימליים, ובפרט $I_1 \cap \dots \cap I_n$ ו-I_{n+1} הם קו־מקסימליים. לפי משפט השאריות הסיני עבור $n = 2$,

$$R/_{I_1 \cap \dots \cap I_{n+1}} = R/_{(I_1 \cap \dots \cap I_n) \cap I_{n+1}} \cong R/_{I_1 \cap \dots \cap I_n} \times R/_{I_{n+1}}$$

ולפי הנחת האינדוקציה נקבל את הדרוש.

□