לינארית 2

פתרון תרגיל 3

<u>שאלה 1</u>

א. לא
ב. כן
ג. לא
ד. כן
ה. כן

אין לי כח להוכיח. בחייכם עשינו את זה מליון פעם...
(אם מישהו בכל זאת מתעקש שישלח לי מייל).

<u>שאלה 2</u>

$p(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x], \qquad a,b,c\in\mathbb{R}$ לכן

$$S\circ T(p(x))=S(T(p(x)))=S(D(x^2p(x)))=S(D(x^2(ax^2+bx+c)))$$
$$=S(D(ax^4+bx^3+cx^2))=S(4ax^3+3bx^2+2cx)=D^2((x^3-x)(4ax^3+3bx^2+2cx))$$
$$=D^2(4ax^6+3bx^5+(2c-4a)x^4-3bx^3-2cx^2)$$
$$=120ax^4+60bx^3+(24c-48a)x^2-18bx$$

<u>שאלה 3</u>

הוקטורים $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ הם בת"ל ולכן בסיס. לכן הגדרת ההעתקה עליהם מגדירה אותה היטב על כל המרחב. מאידך כל וקטור בתמונה הוא צ"ל של תמונותיהם , לכן אם נקח את מקדמי כל הצירופים הלינארים היוצרים את הוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ע"י התמונות: $\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ ונעשה צירופים אלה על $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ נקבל את כל המקורות של $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

קל לבדוק שיש רק אפשרות אחת והיא: $\frac{4}{9}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ לכן

$$T^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{4}{9}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{-7}{9}\\\frac{-8}{9}\end{pmatrix}.$$

<u>שאלה 4</u>

יהי $p(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$. $\left\{1,1+x,1+x+x^2\right\}$ הוא בסיס ל $\mathbb{R}_2[x]$. נציג את $p(x)=ax^2+bx+c$ לפי הבסיס הנ"ל.

$$ax^2+bx+c=\alpha(1+x+x^2)+\beta(1+x)+\gamma=\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\Rightarrow a=\alpha, b=\alpha+\beta, c=\alpha+\beta+\gamma \Rightarrow \alpha=a, \beta=b-a, \gamma=c-b$$

$$\Rightarrow p(x)=a(1+x+x^2)+(b-a)(1+x)+(c-b)1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow T(p(x)) &= T(a(1+x+x^2)+(b-a)(1+x)+(c-b)1)\\ &= aT(1+x+x^2)+(b-a)T(1+x)+(c-b)T(1)\\ &= a(1-x^2+x^4)+(b-a)(x^3+x^2)+(c-b)x\\ &= ax^4+(b-a)x^3+(b-2a)x^2+(c-b)x+a\end{aligned}$$

שאלה 5

קל לראות שהוקטורים $\left\{\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ ת"ל, ומתקיים $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, לכן כל ה"ל צריכה לקיים $T\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\1\end{pmatrix}-2\cdot T\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. בשאלה שלנו נקבל $x+1-2x=1-x\neq 2$ לכן אין ה"ל כזו.