.1

א. ניקח את $B=\{v_1,...,v_n\}$ להיות בסיס כנ"ל כך ש $Tv_i=\lambda_i v_i$ לכל i. לכן ברור ש

$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הינו $f_T=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$

ולכן ברור שהריבוי האלגברי של ע"ע הוא מספר הפעמים שהוא מופיע על האלכסון של המטריצה. הריבוי הגיאומטרי של ע"ע λ הוא מימד המרחב העצמי, כלומר $\dim\{v\mid(T-\lambda I)v=0\}$ אבל זה בדיוק מספר המשתנים החופשיים של המטריצה $T-\lambda I$ וזה בדיוק מספר איברי האלכסון ששווים ל λ (כי אז הם מתאפסים כאשר מחסירים λ והציר נעלם), שזה כפי שהראינו הריבוי האלגברי.

ב. A אינה הפיכה ולפי הנתון $|A-0I|=|A-2I|=|A+2I|=0$ כלומר $0,2,-2$ ע"ע של המטריצה. ולע"ע שונים, יש ו"ע בת"ל. כלומר יש 3 וקטורים עצמיים בת"ל ב $\mathbb{R}^3$ ולפי השלישי חינם הם בסיס. כלומר יש בסיס המורכב מו"ע ולכן המטריצה לכסינה.

.2

א. נסמן $B=\{v_1,...,v_n\},B'=\{w_1,...,w_n\}$.לפי משפט $[G]_{B'}=\left([I]_{B'}^{B}\right)^t[G]_B\overline{[I]_{B'}^{B}}$ או לפי הסימון בשאלה $[G]_{B'}=C^t[G]_B\overline{C}$. אבל מכיוון ש B בא"נ $[G]_B=I$ ולכן $[G]_{B'}=C^t\overline{C}=\overline{\overline{C^t}C}=\overline{C^*C}$. אם C אוניטרית אז ברור ש $[G]_{B'}=\overline{C^*C}=\overline{I}=I$. מצד שני, אם B' בא"נ אזי $C^*C=\overline{[G]_{B'}}=\overline{I}=I$ ולכן C אוניטרית כדרוש.

ב. נשים לב שללא תלות בפרמטרים $<(2,-1),(2,-1)>=0$ וזה נותן את תנאי אי השליליות $v=0\Leftrightarrow<v,v>=0$ כי ברור ש $v=(2,-1)\neq0$.

.3

א. יהי בסיס ל U, $\{v_1,...v_k\}$. נשלים אותו לבסיס למרחב כולו V, $\{v_1,...v_k,v_{k+1},...v_n\}$. ניקח את הבסיס הדואלי $\{\varphi_1,...\varphi_n\}$, ונוכיח ש $\{\varphi_{k+1},...\varphi_n\}$ בסיס ל U^0. דבר ראשון הם בת"ל כי הם חלק מבסיס (הבסיס הדואלי). דבר שני, נוכיח ש $span\{\varphi_{k+1},...\varphi_n\}=U^0$.

אם $\varphi\in U^0$, אזי בפרט $\varphi\in V^*$ ולכן הוא צ"ל של הבסיס הדואלי $\varphi=a_1\varphi_1+...a_n\varphi_n$. אבל הוא במאפס של U לכן $\forall u\in U:\varphi(u)=0$. לכן בפרט זה נכון לאיברי הבסיס של U כלומר $1\le i\le k\Rightarrow\varphi(v_i)=0$ אבל מתכונות הבסיס הדואלי $\varphi(v_i)=a_i$ ולכן $\varphi=a_{k+1}\varphi_{k+1}+...+a_n\varphi_n$ ולכן $\varphi\in span\{\varphi_{k+1},...\varphi_n\}$.

בכיוון השני, אם $\varphi \in span\{\varphi_{k+1},...\varphi_n\}$, $\varphi = a_{k+1}\varphi_{k+1}+...+a_n\varphi_n$, אזי לכל

$u \in U$ מתקיים $u = b_1v_1+...+b_kv_k$ ולפי התכונות של הבסיס הדואלי

$0=...+[a_{k+1}\varphi_{k+1}(v_1)+...+a_n\varphi_n(1)]b_1 = b_1\varphi(v_1)+...+b_k\varphi(v_k)$. $\varphi(u) = b_1\varphi(v_1)+...+b_k\varphi(v_k) = b_1\left[a_{k+1}\varphi_{k+1}(v_1)+...+a_n\varphi_n(1)\right]+...=0$

לכן $\{\varphi_{k+1},...\varphi_n\}$ בת"ל ופורס את U^0 לכן זה בסיס, ולכן המימד של U^0 הינו

$n-k$ ולכן $\dim U + \dim U^0 = k+n-k = n = \dim V$ כפי שרצינו

ב. נוכיח ש $(U\cap W)^0 = U^0 + W^0$. נניח ש $\varphi \in U^0 + W^0$ לכן קיימים

$\varphi_U \in U^0, \varphi_W \in W^0$ כך ש $\varphi = \varphi_U + \varphi_W$. לכן לכל $v \in U\cap W$

$\varphi(v) = \varphi_U(v) + \varphi_W(v) = 0+0=0$ כי $v\in U$ וגם $v \in W$ ולכן $\varphi \in (U\cap W)^0$.

כלומר הראנו ש $(U\cap W)^0 \supseteq U^0 + W^0$. כעת, נוכיח שהמימדים שלהם שווים, ולכן הם שווים.

לפי סעיף א' $\dim(U\cap W)^0 = \dim V - \dim(U\cap W)$ אבל לפי משפט המימדים

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W)$ ולכן בעזרת הפעלת סעיף א' ומשפט המימדים:

$$\dim\left((U\cap W)^0\right) = \dim V - \dim U - \dim W + \dim(U+W) = \dim U^0 + \dim W^0 - \dim(U+W)^0$$

לפי משפט המימדים גם אנחנו יודעים ש:

$$\dim\left(U^0+W^0\right) = \dim U^0 + \dim W^0 - \dim\left(U^0 \cap W^0\right).$$

לכן נותר להוכיח ש $\dim(U+W)^0 = \dim\left(U^0\cap W^0\right)$, נוכיח למעשה ש $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$

באמצעות הכלה דו כיוונית. אם $\varphi \in (U+W)^0$ אז בפרט $\forall u \in U : u \in U+W \Rightarrow \varphi(u) = 0$ ולכן

$\varphi \in U^0$ ובצורה דומה $\varphi \in W^0$ ולכן $\varphi \in U^0 \cap W^0$. מצד שני, אם $\varphi \in U^0 \cap W^0$ ברור שאם

$u+w \in U+W$ אזי $\varphi(u+w) = \varphi(u)+\varphi(w) = 0+0=0$ ולכן $\varphi \in (U+W)^0$.

אכן הראנו שהמימדים של $(U\cap W)^0$ ו- U^0+W^0 שווים, והראנו שאחד מוכל בשני ולכן הם שווים כפי שרצינו.

4. נניח ש $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (זו כוונת השאלה) ונניח $A^t=A$ ולכן A מטריצה לכסינה וכל הע"ע ממשיים לפי משפט. נניח ש A דומה למטריצה אנטי סימטרית B. אזי לפי משפט כל הע"ע של B הינם מדומים טהורים. אבל לפי משפט הע"ע של מטריצות דומות שווים, ולכן המספר היחיד שהוא גם ממשי וגם מדומה טהור הוא אפס. אבל A לכסינה לכן $A=P^{-1}DP$ כאשר D אלכסונית עם הע"ע העצמיים של A שכולם אפס על האלכסון, ולכן $D=0$ ולכן $A=P^{-1}0P=0$.

אם נניח ש $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ נפריך ע"י הדוגמא הנגדית $A=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$, $A^t=A$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=-B^t$. הפולינום האופייני של שתיהן הינו x^2+1 ולכן הע"ע שלהן הינם $\pm i$, הם שונים ולכן הן לכסינות ושתיהן דומות ל $\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$ ולכן דומות זו לזו. על מנת להוכיח כמו למעלה, היינו צריכים שהנתון יהיה A הרמיטית, ו B אנטי הרמיטית.

5. $T^3=TTT=T*TT=IT=T$ שלב אחד הוא לפי צל"ע שלב שני לפי אוניטרי.
6. סכום כל עמודה הוא אחד, לכן אם נכפול את המשוכפלת בוקטור שכולו אחדות, נקבל וקטור שכולו אחדות. $A^t\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ כלומר אחד הוא ע"ע של A^t ולכן $0=\left|A^t-I\right|$ אבל לכן $0=\left|A^t-I\right|=\left|(A-I)^t\right|=\left|A-I\right|$ כי לפי משפט הדטרמיננטה של מטריצה שווה לדטרמיננטה של המשוחלפת.
7. נניח בשלילה שהאיבר החופשי בפולינום המינימלי הינו אפס. לכן $m_A(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x=x(x^{k-1}+a_{k-1}x^{k-2}+...+a_1)$ ולכן $m_A(0)=0$ אבל כל שורש של הפולינום המינימלי הוא ע"ע של המטריצה ולכן אפס הוא ע"ע של המטריצה אבל זה אם"ם היא אינה הפיכה, בסתירה לנתון.