פתרון מבחן לדוגמא - בדידה 1 להנדסה

יש לענות על כל 5 השאלות הבאות.

יש לנמק באופן מלא.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: אין. גם לא מחשבון.

1. נתאר פרדיקטים:

   x הוא בעל משמעות$=M(x)$.

   x הוא טוב $=G(x)$.

   x גורם לטרחה $=T(x)$.

   צריך להסביר את x $=E(x)$.

א. הצרינו את הפסוק הבא: כל דבר שאין לו משמעות, הוא טוב וגם לא גורם טרחה אם לא נצטרך להסביר אותו.

ב. כתבו את השלילה של הפסוק מהסעיף הקודם (באופן פורמלי וגם בעברית). כתבו פסוק שקול לפסוק שקיבלתם, **שלא** מופיע בו הקשר "או" $\vee$.

ג. הוכיחו או הפריכו את השקילויות הבאות עבור אטומים P,Q:

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \to \neg Q) \equiv Q$$

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \to \neg Q) \equiv P$$

פתרון:

א. אפשרות אחת היא

$$\forall x\,:\,\neg M(x)\to(G(x)\wedge(\neg E(x)\to\neg T(x)))$$

. מכיוון שזה משפט די מסובך בעברית, כל הצרנה שתיתנו שהיא אפשרות נכונה לקרוא את המשפט גם תתקבל.

ב. השלילה של הפסוק היא למשל $\exists x\,:\,\neg M(x)\wedge(\neg G(x)\vee(\neg E(x)\wedge T(x)))$.
הוא שקול למשל לפסוק $\exists x\,:\,\neg M(x)\wedge\neg\left(G(x)\wedge\neg(\neg E(x)\wedge T(x))\right)$
שלא מופי בו הקשר $\vee$, כדרוש.

ג. אפשר ע"י טבלת אמת או זהויות:

$$\begin{aligned}(P\vee Q)\wedge(\neg P\to\neg Q)&\equiv(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\equiv\\&\equiv(P\wedge P)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee\cancel{(Q\wedge\neg Q)}\\&\equiv P\vee(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\\&\equiv P\vee(P\wedge\cancel{(Q\vee\neg Q)})\equiv P\end{aligned}$$

ולכן הראשון שקרי והשני אמת.

2. תהיינה A,B,C קבוצות.

א. הוכיחו כי אם $A\cap B=A\cap C$ וגם $A\cup B=A\cup C$, אז $B=C$.

ב. הוכיחו כי $A\setminus(B\setminus C)\subseteq(A\setminus B)\cup C$. תנו דוגמא לקבוצות עבורן אין שיוויון.

ג. הוכיחו או הפריכו: $A\subseteq B\iff P(A)\subseteq P(B)$.

פתרון:

א. נוכיח כי $B=C$ ע"י הכלה דו־כיוונית.
יהי $b\in B$, מכיוון ו $B\subseteq A\cup B$ אז לפי הנתון $b\in A\cup B=A\cup C$.
כלומר ש $b\in A\vee b\in C$. אם $b\in C$ אז סיימנו. אם $b\in A$ אז $b\in A\cap B$ ולכן לפני הנתון $b\in A\cap C$ ובפרט $b\in C$ כדרוש.
הכיוון השני דומה מאוד.

ב. יהי $x \in A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \setminus C) \Leftrightarrow$ $x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ $\Rightarrow x \in A \setminus B \vee x \in C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup C$.

דוגמא לקבוצות עבורת אין שיוויון: $A = B = \emptyset$ ו $C = \{1\}$. כי אז $A \setminus (B \setminus C) = \emptyset$ מוכל ממש ב $(A \setminus B) \cup C = \{1\}$.

ג. הוכחה: $\Leftarrow$: נתון כי $A \subseteq B$, צ"ל כי $P(A) \subseteq P(B)$. יהי $X \in P(A)$ כלומר $X \subseteq A \subseteq B$ ולכן $X \in P(B)$.

$\Rightarrow$: נניח כי $P(A) \subseteq P(B)$, בפרט $A \in P(A)$ ולכן גם $A \in P(B)$, כלומר ש $A \subseteq B$ כדרוש.

3. א. יהיו R, S יחסי שקילות על קבוצה A. הוכיחו כי $R \cap S$ הוא יחס שקילות על A.

ב. יהיו $R_1, R_2, R_3, \ldots$ יחסי סדר על קבוצה A. הוכיחו כי $\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$ הוא יחס סדר על A.

ג. תהי $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$. נגדיר יחס על $A \times A$: $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$ אם $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$.

הוכיחו כי זהו יחס שקילות. רשמו את החלוקה של $A \times A$ המושרה מיחס זה.

פתרון:

א. רפלקסיביות: לכל $a \in A$, $(a, a) \in R, S$ כי הם יח"ש, ולכן גם $(a, a) \in R \cap S$.

סימטריות: נניח $(a, b) \in R \cap S$, אזי $(a, b) \in R$ ובגלל שR יח"ש אז גם $(b, a) \in R$. באות המידה $(a, b) \in S$ גורר ש $(b, a) \in S$. ולכן קיבלנו ש $(b, a) \in R \cap S$.

טרנזיטיביות: נניח כי $(a, b), b(c) \in R \cap S$. אזי $(a, b), (b, c) \in R$ ובגלל שהוא יח"ש נקבל ש $(a, c) \in R$. באופן דומה נקבל ש $(a, b) \in S$ ולכן יחד נקבל ש $(a, c) \in R \cap S$.

ב. רפלקסיביות: לכל $a \in A$, $(a, a) \in R_n$ לכל n, כי R_n הם כולם יחסי

סדר, ולכן $(a,a)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$.

אנטי־סימטריות: נניח כי $(a,b),(b,a)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$, ובפרט $(a,b),(b,a)\in R_1$. R_1 הוא יחס סדר ולכן $a=b$.

טרנזיטיביות: נניח כי $(a,b),(b,c)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$, אזי לכל n : $(a,b),(b,c)\in R_n$. R_n הם כולם יחסי סדר ולכן נקבל שלכל n : $(a,c)\in R_n$ ולכן $(a,c)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$.

ג. רפלקסיבי: לכל $(a,b)\in A\times A$, צריך להראות $(a,b)\sim(a,b)$ שפירושו $a+b=a+b$ מה שאכן תמיד נכון.

סימטרי: צריך להראות שאם $(c,d)\sim(a,b)$ אז $(a,b)\sim(c,d)$. לפי ההנחה $a+b=c+d$ ולכן כמובן $c+d=a+b$ ולכן $(c,d)\sim(a,b)$.

טרנזיטיבי: נניח ש $(a_1,a_2)\sim(b_1,b_2),\ (b_1,b_2)\sim(c_1,c_2)$ כלומר ש $a_1+a_2=b_1+b_2,\ b_1+b_2=c_1+c_2$. ואז $a_1+a_2=c_1+c_2$ ולכן $(a_1,a_2)\sim(c_1,c_2)$.

נרשום את החלוקה, שזה בעצם לרשום את קבוצת המנה. נשים לב שמחלקת שיקלות נראית כך:

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in A\times A\,|\,(a,b)\sim(x,y)\}=\{(x,y)\,|\,x,y\in A,\ a+b=x+y\}$$

כלומר שהוא מאופיין בסכום של הקואורדינטות. כך קל לרשום :

$$\begin{aligned}
&[(1,1)]=\{(x,y)\,|\,x,y\in A,\ x+y=2\}=\{(1,1)\}\\
&[(1,2)]=\{(1,2),(2,1)\}\\
&[(1,3)]=\{(1,3),(3,1),(2,2)\}\\
&[(1,4)]=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}\\
&[(1,5)]=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}\\
&\qquad\vdots\\
&[(5,5)]=\{(5,5),(4,6),(6,4)\}\\
&[(5,6)]=\{(5,6),(6,5)\}\\
&[(6,6)]=\{(6,6)\}
\end{aligned}$$

כמות המחלקות שקילות היא לפי מספר הסכומים שניתן לקבל, שזה (כפי שכל מי ששיחק קטאן מכיר מקרוב) כל המספרים בין 2 ל 12, כלומר יש 11 כאלה.

4. תהי פונקציה $f\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ המוגדרת ע"י $f([a]_6) = ([a]_3, [a]_2)$.

א. הוכיחו כי הפונקציה מוגדרת היטב.

ב. האם הפונקציה היא על? חח"ע? הפיכה? נמקו.

ג. חשבו את $f^{-1}\left(\mathbb{Z}_3 \times \{0\}\right) \cap f^{-1}\left(\{0\} \times \mathbb{Z}_2\right)$.

פתרון:

א. נניח $[a]_6 = [a']_6$ כלומר ש $a \equiv_6 a'$. צריך להראות ש $f([a]_6) = f([a']_6)$, כלומר ש $([a]_3, [a]_2) = ([a']_3, [a']_2)$ שזה אומר ש $a \equiv_3 a'$, $a \equiv_2 a'$.
לפי הנתון $6 \mid a - a'$ ובפרט $2, 3 \mid a - a'$ ולכן $a \equiv_3 a'$, $a \equiv_2 a'$.
ולכן הפונקציה מוגדרת היטב.

ב. נראה שהפונקציה היא חח"ע: נניח $f([a]_6) = f([a']_6)$ כלומר ש $([a]_3, [a]_2) = ([a']_3, [a']_2)$, כלומר $a \equiv_3 a'$, $a \equiv_2 a'$, מה שאומר ש $2, 3 \mid a - a'$ ולכן $6 \mid a - a'$ ו $a \equiv_6 a'$.
כעת, f היא פונקציה מקבוצה סופית מגודל $|\mathbb{Z}_6| = 6$ לקבוצה סופית מגודל $|\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2| = 3 \cdot 2 = 6$, כלומר בין קבוצות סופיות מאותו גודל. ולכן היא חח"ע אם ורק אם היא על. כבר הוכחנו שהיא חח"ע ולכן היא גם על. ולכן היא גם הפיכה.

ג. נחשב כל תמונה הפוכה בנפרד ואז נחשב את החיתוך:

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left(\mathbb{Z}_3 \times \{[0]_2\}\right) &= \{[a]_6 \in \mathbb{Z}_6 \mid f([a]_6) \in \mathbb{Z}_3 \times \{[0]_2\}\} \\
&= \{[a]_6 \in \mathbb{Z}_6 \mid ([a]_3, [a]_2) \in \mathbb{Z}_3 \times \{[0]_2\}\} \\
&= \{[a]_6 \in \mathbb{Z}_6 \mid [a]_3 \in \mathbb{Z}_3,\ [a]_2 \in \{[0]_2\}\} \\
&= \{[a]_6 \in \mathbb{Z}_6 \mid [a]_2 = [0]_2\} = \{[a]_6 \in \mathbb{Z}_6 \mid a \equiv_2 0\} \\
&= \{[a]_6 \in \mathbb{Z}_6 \mid 2 \mid a\} = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}.
\end{aligned}$$

באופן דומה

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\left(\{0\}\times\mathbb{Z}_2\right) &= \{[a]_6\in\mathbb{Z}_6 \mid f([a]_6)\in\{[0]_3\}\times\mathbb{Z}_2\} = \{[a]_6\in\mathbb{Z}_6 \mid ([a]_3,[a]_2)\in\{[0]_3\}\times\mathbb{Z}_2\} \\
&= \{[a]_6\in\mathbb{Z}_6 \mid a\equiv_3 0\} = \{[a]_6\in\mathbb{Z}_6 \mid 3\mid a\} = \{[0]_6,[3]_6\}
\end{aligned}
$$

ולכן החיתוך הוא $f^{-1}\left(\mathbb{Z}_3\times\{0\}\right)\cap f^{-1}\left(\{0\}\times\mathbb{Z}_2\right)=\{[0]_6\}$.

5. תהיינה קבוצות A,B קבוצות לא ריקות, ונתונה פונקציה $f\colon A\cup B\to A$ חח"ע.
הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. A בהכרח אינסופית.

ב. B בהכרח אינסופית.

ג. $B\subseteq A$

ד. $|B|\le|A|$.

פתרון:

א. הפרכה: נקח $A=\{1\}$ ו $B=\{1\}$. אזי $A\cup B=\{1\}$. ויש פונקציה חח"ע $f\colon\{1\}\to\{1\}$ שהיא $f(1)=1$.

ב. הפרכה: אותה דוגמא מקודם.

ג. הפרכה: ניקח $A=\mathbb{N}$ ו- $B=\mathbb{Z}$. אז ברור ש $A \nsupseteq B$ אבל קיימת פונקציה חח"ע $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ משיקולי עצמה, שכן $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}|$ ולכן יש בינהן פונקציה הפיכה, שהיא בפרט חח"ע.

ד. הוכחה: מכיוון שנתון שקיימת פונקציה $f\colon A\cup B\to A$ חח"ע, אז $|A\cup B|\le|A|$. מצד שני, $B\subseteq A\cup B$ ולכן $|B|\le|A\cup B|$. יחד נקבל $|B|\le|A|$.