7/11/14 קפ׳ג

נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

בקיבה הרצאה

מגדלי האנוי -

← 3 עמודים, 20 דסקיות בגדלים שונים.

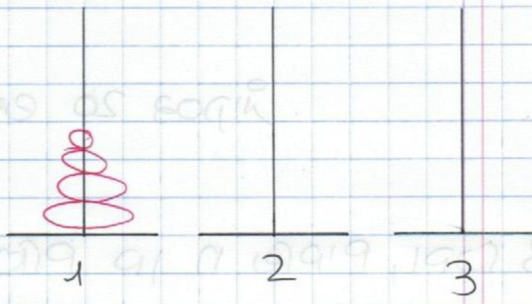
← במצב התחלתי כולן בעמוד הראשון

← צריך להעביר את כולן לעמוד 3, ואז יחרב העולם.

← אסור להניח דיסקית על דיסקית קטנה יותר.

← מעבירים דיסקית אחת כל יום.

← מתי יחרב העולם/כמה ימים לסוף העולם?



פתרון (עבור n דסקיות) -

נניח שאנו יודעים לטפל ב-n-1 דסקיות

← נעביר n-1 דסקיות מעמוד 1 ל-2.

← נעביר את הדסקית הגדולה מ-1 ל-3.

← נעביר n-1 דסקיות מ-2 ל-3.

← עכשיו העולם נחרב.

← תנאי עצירה: אם n=1, פשוט מעבירים את הדסקית.

נסמן ב-a_n את מספר הימים לסוף העולם (שלוקח להעביר n דסקיות)

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$$

העברת n-1 מעמוד 1 לעמוד 2. | העברת הדיסקית הגדולה מ-1 ל-3 | העברת n-1 דסקיות מ-2 ל-3

$$a_n = 2a_{n-1}+1 \qquad a_0 = 0$$ ← כמה פעמים לוקח להעביר 0 דסקיות.

$$\Rightarrow a_n = 2(1+2a_{n-1})+1 = 1+2+4a_{n-2} = 1+2+4(1+2a_{n-3})$$

$$= 1+2+4+8a_{n-3} = \dots = 1+2+4+8+\dots+2^n a_0$$

$$= 1+2+4+8+\dots+2^{n-1} = \boxed{2^n-1}$$ ← סכום של סדרה הנדסית

⊛ סכום סדרה הנדסית:

a_1, q (איבר ראשון, מנה)

$a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2 \dots$

$a_n = a_1 \cdot q^n$

$S_n = a_1(1+q+q^2 \dots + q^{n-1})$

$qS_n = a_1(q+q^2+q^3+\dots+q^n) = S_n - a_1 + a_1 q^n$

$\Rightarrow S_n(q-1) = a_1(q^n-1)$

$$\boxed{S_n = \frac{q^n-1}{q-1} \cdot a_1}$$

←

7/1/14

* בעיה זו פתרנו בעזרת רקורסיה מכיוון שזה הדבר הכי נוח ובמצבים יחסית קשים של בעיות מסוג זה.

הבנו: נוסחאת הרקורסיה ← 2^n-1

תנאי עצירה ← $a_0=0$

⇐ ייקח בערך 3000 שנה בהנחה שיש 20 דסקיות.

חידה נוספת - קנגורו מנסה לעבור גשר בן n שלבים, ובכל צעד הקנגורו יכול לעלות שלב אחד או שניים.

בכמה דרכים הוא יכול להגיע לסוף?

נסמן ב- a_n את מספר הדרכים לטפס לסוף בגובה n.

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ נוסחאת נסיגה

תנאי עצירה: $a_1=1$ מספר הדרכים להגיע לסוף עם שלב אחד.

$a_0=1$

$a_2=2$ מספר הדרכים להגיע לסוף עם שני שלבים.

* מספר תנאי ההתחלה הוא כעומק הרקורסיה (a_{n-2} ⇐ 2 תנאי התחלה).

* מומלץ לחשב לעצמנו יותר תנאי התחלה על מנת לבדוק אם משוואת הרקורסיה שלנו עובדת.

המספרים הראשונים בסדרה:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89

⇐ הסדרה נקראת "סדרת פיבונאצ'י".

נחפש ~~את~~ צורה מפורשת ל- a_n:

נגדיר פונקציה: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots$ ← לא פולינום מכיוון שהוא אינסופי.

בהנתן x ניתן לחשב את הפונקציה ← $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ← טור חזקות.

$$X \cdot P(x) = a_0X + a_1X^2 + a_2X^3 + \ldots$$

$$X^2 \cdot P(x) = a_0X^2 + a_1X^3 + a_2X^4 \ldots$$

←

בס״ד

7/1/14

(בערך) $P(x) = xP(x) + x^2P(x)$

הצדקה: האיבר השישי ב-$P(x)$ שווה למקדם של x^3 ב-$xP(x)$

פלוס המקדם של x^3 ב-$x^2P(x)$ וזה יוצא ← $a_3 = a_2 + a_1$ ✓

נתקן את הנוסחה: (מכיוון שהנוסחה שלנו תקפה ל-a_2 ומעלה)

(בדיוק) $P(x) = xP(x) + x^2P(x) + \underbrace{(a_1 - a_0)x + a_0}_{\text{איברים שמתקבלים בכפל ב-}x\text{ וב-}x^2} = xP(x) + x^2P(x) + 1$

הצבנו $a_0 = a_1 = 1$ ← $(a_1 - a_0) = 0$

נכון רק לסדרת פיבונאצ'י!

← חשוב להדגיש ש-x הוא משתנה ולא נציב בו אף ערך.

נבודד את $P(x)$: $P(x) = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{1}{-x^2-x+1}$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$-x^2 - x + 1 = -(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\to P(x) = \frac{1}{-(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

← מתי ניתן לפרק באופן זה?

← כאשר במכנה יש פולינום

← עם השורשים ויתכן שיהיה מעלה שונה (גבוהה מ-1)

← עם המרוכבים - תמיד ניתן להביא את זה לצורה הושגה.

⊛ תזכורת נוספת מהתיכון:

$$|q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{\frac{A}{x_1}}{\frac{x-x_1}{x_1}} + \frac{\frac{B}{x_2}}{\frac{x-x_2}{x_2}} = \frac{A'}{\frac{x}{x_1} - 1} + \frac{B'}{\frac{x}{x_2} - 1} = \frac{-A'}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{-B'}{1 - \frac{x}{x_2}} =$$

$$= -A'\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right) - B'\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-A' \cdot \frac{1}{x_1^n} - B' \frac{1}{x_2^n}\right) \cdot x^n}$$

← לפי התזכורת ← סכום של טור הנדסי.

← נוסחה מפורשת למקדם של x^n.

ניתן למצוא את A' ו-B' עפ״י תנאי התחלה.

המקדם של x^0 ← $1 = a_0 = -A' - B'$

המקדם של x^1 ← $1 = a_1 = -A' \cdot \frac{1}{x_1} - B' \frac{1}{x_2}$

שתי משוואות בשני נעלמים

$$\boxed{a_n = -A'\left(\frac{1}{x_1}\right)^n - B'\left(\frac{1}{x_2}\right)^n}$$

←

⊛ קיבלנו נוסחה מפורשת ולא נוסחה רקורסיבית.

⊛ x_1 ו- x_2 הם מספרים לא רציונליים ⇐ ב-A' ו-B' יהיה גם מספר לא רציונלי ⇐ וקיבלנו מספרים שלמים.

לבדוק בבית.