לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשעט, מועד ב'

24.9.2019, כ"ד אלול תשעט

מרצים: מר אחיה בר־און, ד"ר אליהו מצרי, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: רועי אבל, ניקול בלשוב, עדי בן־צבי, תמר בר־און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, פולינה לוצקר, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות .
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד.
  ניתן להשתמש במחברת כטיוטא, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.
- סימונים לאורך הבחינה: עבור מטריצה A, נסמן:
  - $N(A)$ את מרחב האפס של A.
  - $C(A)$ את מרחב העמודות של A.
  - $R(A)$ את מרחב השורות של A.
  - $rank(A)$ את הדרגה של A.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

1. (23 נק') תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ מטריצה התלויה בפרמטר a.

(א) מצאו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה A הפיכה.
פתרון: ראינו בהרצאה כי $|A| \neq 0$ אמ"מ A הפיכה. נבדוק, באופן שקול, מתי $|A| \neq 0$.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a^2 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-a^2 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot 1 \cdot \left(1-a^2\right)$$

כאשר המעבר הראשון הוא ביצוע הפעולה $R_3 \leftarrow R_3 - aR_1$ שלא משנה את הדטרנמיננטה, השיוויון השני הוא פיתוח לפי עמודה 1 והשיוויון השלישי הוא דטר' של מטריצה משולשית. לכן A הפיכה אמ"מ $|A| \neq 0$ אמ"מ $1-a^2 \neq 0$ אמ"מ $a \neq \pm 1$.

(ב) מצאו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} \in C(A)$.
פתרון: שקול לבדוק מתי יש פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix}$. נדרג את המערכת ונגיע לתשובה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & a \\ 0 & 1 & 0 & a^2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & a \\ 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & a \\ 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-2a^2 \end{array}\right)$$

במקרה ש $a \neq \pm 1$ אזי המטריצה הפיכה ולכן עמודותיה בת"ל ומתקיים $C(A) = \mathbb{R}^3$ בפרט $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} \in C(A)$ (או בכיוון אחר: נקבל כי למערכת יש פתרון שהרי היא בצורה מדורגת, ללא משתנים חופשיים, ללא שורת סתירה).
במקרה ש $a = 1$ או $a = -1$: נקבל סתירה בשורה השלישית (השורה השלישית היא $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$) ולכן עבור aים אלו לא מתקיים $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} \in C(A)$.

(ג) <u>לכל</u> ערך $a \in \mathbb{R}$, מצאו בסיס ומימד ל $N(A)$ (חלקו למקרים).
פתרון: במקרה ש $a \neq \pm 1$ אזי המטריצה הפיכה ולכן $N(A) = \{0\}$ שמימדו 0 ובסיסו הוא $\emptyset$.
במקרה ש $a = 1$ או $a = -1$: נשתמש בצורה המדורגת מסעיף קודם

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כדי להסיק שבמקרה של $a = 1$ נקבל ש $N(A) = \left\{\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ שמימדו 1 ובסיס אפשרי הוא $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

ובאופן דומה במקרה של $a=-1$ נקבל ש $N(A)=\left\{\begin{pmatrix} t\\ 0\\ t\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ שמימדו 1 ובסיס אפשרי הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

(ד) עבור $a=1$, מצאו בסיס ומימד לחיתוך $N(A)\cap C(A)$.

פתרון: כיוון ש $N(A)\cap C(A)\subseteq N(A)$ אזי $\dim N(A)\cap C(A)\le \dim N(A)=1$ ולכן $\dim N(A)\cap C(A)\in\{0,1\}$.
נניח בשלילה כי $\dim N(A)\cap C(A)=1$ ונקבל כי $N(A)\cap C(A)=N(A)$ (הכלה בכיוון אחד ושיוויון מימדים) בפרט $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\in N(A)=N(A)\cap C(A)$ ולכן

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\in C(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר יש סקלארים α,β כך ש

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

אבל מהקורדינאטה השניה נקבל כי $\beta=0$ ונשאר עם השיוויון (מהקורדינאטה הראשונה והשלישית) של $\alpha=-1$ וגם $\alpha=1$ וקיבלנו סתירה.

לכן $\dim N(A)\cap C(A)=0$ ומכאן ש $N(A)\cap C(A)=\{0\}$ (הכלה בכיוון אחד ושיוויון מימדים) ובסיס למרחב הוא $\emptyset$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (24 נק') נסמן $V=\mathbb{R}^3$ ונתון כי

$$B=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל V. נגדיר העתקה לינארית $T:V\to V$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b-2c\\a\\-a+b+c\end{pmatrix}.$$

(א) מצאו בסיס C ל V כך ש $[T]_C^B=I$.

פתרון: נגדיר

$$c_1=Tv_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$c_2=Tv_2=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$c_3=Tv_3=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

ונגדיר $C=\{c_1,c_2,c_3\}$. נוכיח כי C בסיס (סדור) ואז לפי הגדרה נקבל כי $[T]_C^B=I$. אכן, מספיק לבדוק כי c_1,c_2,c_3 בת"ל (בגלל השלישי חינם). נבדוק זאת ע"י שנשים את הוקטורים כעמודות מטריצה ונבדוק שהמטריצה הפיכה (נשים את c_1 כעמודה שניה, c_2 כעמודה שלישית ו c_3 כעמודה ראשונה). אכן הדטר' של המטריצה (המשולשית) שמתקבלת היא

$$\left|\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right|=9$$

ולכן היא אכן הפיכה.

(ב) הוכיחו כי T הפיכה ומצאו נוסחה מפורשת עבור $T^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

פתרון: ראינו משפט שאם קיימת מטריצה מייצגת ל T שהיא הפיכה אז T הפיכה. בסעיף קודם ראינו ש I (שהיא הפיכה) מייצגת את T ולכן T הפיכה ומתקיים כי

$$T^{-1}c_i=v_i$$

לכל $1 \le i \le 3$. בפרט

$$T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}T^{-1}c_3 = \frac{1}{3}v_3$$
$$T^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = T^{-1}c_1 = v_1$$
$$T^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}T^{-1}c_2 = \frac{1}{3}v_2$$

ולכן

$$\begin{aligned} T^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} &= aT^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + bT^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + cT^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= a\frac{1}{3}v_3 + bv_1 + c\frac{1}{3}v_2 \\ &= a\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c \\ -\frac{1}{3}a + b + \frac{1}{3}c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ג) חשבו את $\mathrm{rank}\left([T^2]_B^B\right)$ (כאשר $T^2 = T \circ T$).
פתרון: כיוון ש T הפיכה אזי $[T]_B^B$ הפיכה ואז גם (השיווין מתקיים לפי משפט) $[T^2]_B^B = [T]_B^B \cdot [T]_B^B$ הפיכה ככפל של הפיכות ולכן $\mathrm{rank}\left([T^2]_B^B\right) = 3$.

(ד) מצאו בסיס C ל V עבורו $[T]_B^C = I$, או הוכיחו (בלי למצוא אותו מפורשות) שקיים בסיס כזה.
פתרון: כיוון ש T הפיכה, נקבל כי $C = \left\{c_i = T^{-1}v_i \mid 1 \le i \le 3\right\}$ בת"ל (ולכן לפי השלישי חינם בסיס) הוכחה: נניח צירוף לינארי שמתאפס

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i c_i = 0$$

אזי לפי הגדרה $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i T^{-1} v_i = 0$ נפעיל את T על שני האגפים לקבל כי $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = 0$ מה שגורר כי $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (כי v_1, v_2, v_3 בת"ל) כנדרש. לפי הגדרה נקבל כי $[T]_B^C = I$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

3. (21 נק') תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית.

הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^3)$ אז $C(A) = C(A^2)$

פתרון: הוכחה: מתקיים כי $C(A^3) \subseteq C(A)$ כי אם $A^3x \in C(A^3)$ אזי $A^3x = A\left(A^2x\right) \in C(A)$ ולכן אם המימדים שלהם שווים (כלומר $rank(A) = rank(A^3)$) אזי המרחבים שווים, כלומר, $C(A^3) = C(A)$.

כעת, באופן דומה מתקיים כי $C(A^{i+1}) \subseteq C(A^i)$ לכל i טבעי (כי אם $A^{i+1}x \in C(A^{i+1})$ אזי $A^{i+1}x = A^i\left(Ax\right) \in C(A^i)$ ולכן

$$C(A) = C(A^3) \subseteq C(A^2) \subseteq C(A)$$

ולפי הכלה דו כיוונית נקבל$C(A) = C(A^2)$ כנדרש.

(ב) אם $\mathrm{rank}(A^2) = \mathrm{rank}(A^3)$ אז $C(A) = C(A^2)$

פתרון: הפרכה: נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומתקיים כי $A^2 = 0, A^3 = 0$ ולכן $rank(A^2) = rank(A^3) = 0$. אבל $\dim C(A) = 1$ (בסיס אפשרי למרחב העמודות הוא העמודה השלישית של A בלבד) ולכן בפרט $\dim C(A) \neq \dim C(A^2) = rank(A^2)$ ולכן בפרט $C(A) \neq C(A^2)$.

(ג) אם $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$ אז $C(A) = C(A^3)$

פתרון: הוכחה: הוכחנו בסעיף א כי $C(A^2) \subseteq C(A)$ ולכן אם המימדים שלהם שווים (כלומר $rank(A) = rank(A^2)$) אז המרחבים שווים, כלומר $C(A^2) = C(A)$.

כעת נוכיח כי $C(A) = C(A^3)$ ע"י הכלה דו־כיוונית: $(\supseteq)$הוכחנו בסעיף א. $(\subseteq)$ יהא $Ax \in C(A)$ בגלל השיוון $C(A^2) = C(A)$ נקבל כי קיים x' כך ש $Ax = A^2x' = AAx'$ ושוב, לפי אותו שיוויון, נקבל כי קיים $x"$ כך ש $Ax' = A^2x"$ ולכן

$$Ax = AAx' = AA^2x" = A^3x" \in C(A^3)$$

כנדרש.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

4. (16 נק') יהא V מרחב וקטורי מימד n (טבעי) ותהא $T:V\to V$ העתקה לינארית.

(א) הוכיחו: אם T אינה העתקת האפס (כלומר לא שולחת את כל הוקטורים לאפס) אז קיים בסיס $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ ל V עבורו מתקיים $Tv_i\neq 0$ לכל $1\leq i\leq n$.

פתרון: נניח כי T אינה העתקת האפס אזי קיים $v\in V$ כך ש $Tv\neq 0$. כיוון שT העתקה לינארית, $v\neq 0$ ונסמנו $v=v_1$. נשלים את $\{v_1\}$ לבסיס $\{v_1,\ldots,v_n\}$ ל V. אם מתקיים ש $Tv_i\neq 0$ לכל $1\leq i\leq n$ סיימנו. אחרת קיים j כך ש $Tv_j=0$. בה"כ נניח שהוקטורים שנשלחים לאפס הם הוקטורים האחרונים, כלומר נניח כי קיים $k<n$ המקיים כי $Tv_i\neq$ לכל $i\leq k$ ו $Tv_i=0$ לכל $Tv_i=0$. לכל $1\leq i\leq k$ נגדיר $w_i=v_i$ ולכל $k<i\leq n$ נגדיר $w_i=v_i+v_1$ (כלומר נסתכל על הוקטורים $(v_1,\ldots,v_k,v_{k+1}+v_1,\ldots,v_n+v_1$) טענה $\{w_1,\ldots,w_n\}$ בסיס ל V. הוכחה: לפי השלישי חינם, מספיק להראות כי הם בת"ל. אכן, נניח צירוף לינארי שמתאפס

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i=0$$

ונראה כי זהו הצירוף הלינארי הטריוואלי. לפי הגדרה נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i+\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i\left(v_i+v_1\right)=0$$

ואם נקבץ את צד שמאל בצורה שונה נקבל כי

$$\left(\alpha_1+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_n\right)v_1+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i v_i=0$$

כיוון ש $v_1,\ldots,v_n$ בסיס ובפרט בת"ל נקבל כי המקדמים שווים לאפס. כלומר $(\alpha_1+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_n)=0,\alpha_2=$ $0,\ldots,\alpha_n=0$ שגורר כי $\alpha_i=0$ לכל $1\leq i\leq n$ וסיימנו.

כעת נשאר להראות כי מתקיים $Tw_i\neq 0$ לכל $1\leq i\leq n$. אכן: יהא i. אם $1\leq i\leq k$ אזי מתקיים כי $Tw_i=Tv_i\neq 0$ ואם $k<i\leq n$ מתקיים כי

$$Tw_i=T\left(v_i+v_1\right)=Tv_i+Tv_1=0+Tv_1=Tv_1\neq 0$$

כנדרש.

(ב) **הוכיחו/הפריכו:** קיים בסיס $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ ל V עבורו מתקיים $v_i\in\mathrm{Im}(T)+\ker(T)$ לכל $1\leq i\leq n$

פתרון: הפרכה: נגדיר את העתקה הלינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ להיות כפל במטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. מתקיים כי

$$\mathrm{Im}(T)=\ker(T)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(התמונה: בגלל שהעמודה השנייה של A היא אפס. הגרעין: ע"י פתירה של המערכת $Ax=0$) ולכן גם $\mathrm{Im}(T)+\ker(T)=$ $span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

טענה: לא קיים בסיס $B=\{v_1,v_2\}$ ל $\mathbb{R}^2$ עבורו מתקיים $v_i\in\mathrm{Im}(T)+\ker(T)$ לכל $1\leq i\leq 2$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים בסיס כזה אזי $B\subseteq\mathrm{Im}(T)+\ker(T)$ ולכן $\mathbb{R}^2=span(B)\subseteq\mathrm{Im}(T)+\ker(T)$ ולכן $\mathrm{Im}(T)+\ker(T)=\mathbb{R}^2$ (ההכלה השנייה טריוואלית). סתירה.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

5. (16 נק')

(א) מצאו מטריצה הפיכה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת $A = \operatorname{adj}(2A)$.

פתרון: אם A הפיכה אז $2A$ הפיכה ואז לפי משפט מתקיים כי $\operatorname{adj}(2A) = |2A|\,(2A)^{-1} = 2^3\,|A|\,2^{-1}A^{-1} = 2^2\,|A|\,A^{-1}$.
נמצא $\alpha \in \mathbb{R} \neq 0$ כך שהמטריצה הסקלארית $A = \alpha I$ תקיים את הדרוש.

צריך להתקיים כי $\alpha I = 2^2 \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^{-1} I$ או באופן שקול $I = 2^2 \alpha I$. נגדיר $\alpha = \frac{1}{4}$ ואז A הפיכה (כי $|A| = \left(\frac{1}{4}\right)^3$ וההופכית $A^{-1} = 4I$) ומתקיים

$$\operatorname{adj}(2A) = 2^2\,|A|\,A^{-1} = 2^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 4I = \frac{1}{4}I = A$$

כנדרש.

(ב) מצאו מטריצה הפיכה $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ המקיימת $A = \operatorname{adj}(-2A)$.

פתרון: אם A הפיכה אז $-2A$ הפיכה ואז לפי משפט מתקיים כי $\operatorname{adj}(-2A) = |-2A|\,(-2A)^{-1} = (-2)^4\,|A|\,(-2)^{-1}\,A^{-1} = -2^3\,|A|\,A^{-1}$. נמצא $\alpha \in \mathbb{C} \neq 0$ כך שהמטריצה הסקלארית $A = \alpha I$ תקיים את הדרוש.

צריך להתקיים כי $\alpha I = -2^3 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^{-1} I$ או באופן שקול $I = -2^3 \alpha^2 I$. נפתור $-2^3\alpha^2 = 1$ או $\alpha^2 = -\frac{1}{8}$ ונקבל $\alpha = \pm i\sqrt{\frac{1}{8}}$.
נגדיר $\alpha = i\sqrt{\frac{1}{8}}$ ואז A הפיכה (כי $|A| = \left(i\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^4 = \left(\frac{1}{8}\right)^2$ וההופכית $A^{-1} = -i\sqrt{8}I$) ומתקיים

$$\operatorname{adj}(-2A) = -2^3\,|A|\,A^{-1} = -2^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(-i\sqrt{8}I\right) = i\sqrt{\frac{1}{8}}I = A$$

כנדרש.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___