לינארית 2 תשפ"ד אביב מועד א

מרצה: ד"ר עדי בן צבי.
מתרגלים: עידו גולדנברג, עידו פלדמן.
יש לענות על כל שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 108 נק.
זמן הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.הוכיחו כי A לכסינה אממ פ"מ שלה מל"ל שונים.(15 נק)

2. נתבונן ב $\mathbb{R}_2[x]$ עם המ"פ הסטנדרטית הבאה:

$$\forall p(x), q(x) \in R_2[x] : < p, q >:= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

   (א) מצאו בסיס או"ג עבור $\mathbb{R}_2[x]$. (8 נק)

   (ב) מצאו את ההיטל של הווקטור $1 - x^2$ על תת-המרחב $U := sp\{1, x\}$. (5 נק)

3. אין קשר בין בסעיפים הבאים:

   (א) תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ המקיימת $rankA = 2,\ rank(A - iI) = 4$. מצאו את הפ"מ של A?(12 נק)

   (ב) (10 נק) תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו כי כל הע"ע של A^*A הם ממשיים אי-שליליים (כלומר הם ≤ 0).

4. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק לסעיף)

   (א) קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הרמיטית המקיימת $tr(A) = i$.

   (ב) יהי Vממ"פ מימד n, ויהי B בסיס סדור של V. אזי G_B (מטריצת גראם לפי B) היא לכסינה.

   (ג) יהי Vממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהי U ת"מ שלו. יהי $v \in V$ ונסמן ב p את ההיטל שלו על U. אזי,

$$v \in U^{\perp} \Longleftarrow ||v + p|| = ||v - p||$$

5. תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים (גדולים <u>ממש</u> מ 0).

   (א) (10 נק) הוכיחו כי קיימת מטריצה R הפיכה כך ש $M = RR^t$

   (ב) (10 נק) תהי M כנ"ל ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש

$$C^tMC = I \text{ וגם } C^tAC \text{ היא אלכסונית}$$

   (ג)

   הגדרה. תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים, ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. נאמר כי $\lambda \in \mathbb{C}$ הוא <u>M**-ע"ע**</u> אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ כך ש

$$Av = \lambda Mv$$

   v כזה יקרא <u>M**-ו"ע**</u> של A המתאים ל λ.

   תהי M כנ"ל (ממשית וסימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים), ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית.

   i. (10 נק) הוכיחו שכל ה M-ע"ע של A הם ממשיים.

   ii. (7 נק) הוכיחו שקיים בסיס $\mathbb{R}^n$המורכב מ M-ו"ע של A.

בהצלחה!!

שאלה 1: (15 נק) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו כי A לכסינה אממ פ"מ שלה מל"ל שונים.

פתרון:

פתרון שאלה 1 (המשך)

<u>שאלה 2:</u> נתבונן ב $\mathbb{R}_2[x]$ עם המ"פ הסטנדרטית הבאה:

$$\forall p(x), q(x) \in R_2[x] : < p, q >:= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

1. (8 נק) מצאו בסיס או"ג עבור $\mathbb{R}_2[x]$.
2. (5 נק) מצאו את ההיטל של הווקטור $1 - x^2$ על תת-המרחב $U := sp\{1, x\}$.

<u>פתרון:</u>

פתרון שאלה 2 (המשך)

פתרון שאלה 2 (המשך)

שאלה 3: אין קשר בין בסעיפים הבאים:

1. (12 נק) תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ המקיימת $rank(A - iI) = 4$,$rankA = 2$. מצאו את הפ"מ של A?

2. (10 נק) תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו כי כל הע"ע של A^*A הם ממשיים אי-שליליים (כלומר הם $0 \leq$).

פתרון:

פתרון שאלה 3 (המשך)

פתרון שאלה 3 (המשך)

פתרון שאלה 3 (המשך)

<u>שאלה 4:</u> <u>הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:</u> (7 נק לסעיף)

1. קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הרמיטית המקיימת $tr(A) = i$.
2. יהי V ממ"פ מימד n, ויהי B בסיס סדור של V. אזי G_B (מטריצת גראם לפי B) היא לכסינה.
3. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהי U ת"מ שלו. יהי $v \in V$ ונסמן ב p את ההיטל שלו על U. אזי,

$$v \in U^{\perp} \Longleftarrow ||v+p|| = ||v-p||$$

<u>פתרון שאלה 4:</u>

פתרון שאלה 4 (המשך)

פתרון שאלה 4 (המשך)

שאלה 5: תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים (גדולים ממש מ 0).

1. (10 נק) הוכיחו כי קיימת מטריצה R הפיכה כך ש $M = RR^t$
2. (10 נק) תהי M כנ"ל ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש

$C^tMC = I$ וגם C^tAC היא אלכסונית

3.

הגדרה. תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים, ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. נאמר כי $\lambda \in \mathbb{C}$ הוא **M-ע"ע** אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ כך ש

$$Av = \lambda Mv$$

v כזה יקרא **M-ו"ע** של A המתאים ל λ.

תהי M כנ"ל (ממשית וסימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים), ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית.

(א) (10 נק) הוכיחו שכל ה M-ע"ע של A הם ממשיים.

(ב) (7 נק) הוכיחו שקיים בסיס $\mathbb{R}^n$המורכב מ M-ו"ע של A.

פתרון:

פתרון שאלה 5 (המשך)

פתרון שאלה 5 (המשך)

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___