פתרון מבחן תשעז מועד ב

3 בינואר 2019

1. משפט מהרצאה
2. משפט מהרצאה
3.
4.
5.
6.

(א) כיוון ש $n-1 = rank(A) = \dim R(A)$ נקבל שיש $n-1$ בת"ל. נניח שהשורה הנוספת היא שורה i ונקבל כי A_i מטריצה ששורותיה בת"ל. כיוון ש $A_i \in \mathbb{F}^{n-1\times n-1}$ ריבועית עם שורות בת"ל אזי A_i הפיכה.

(ב) מנתון כי A_n הפיכה נסיק כי קיימת מטריצה $C\mathbb{F}^{n-1\times n-1}$ כך ש $CA_n = I$ כאשר Iהיא מטריצת היחידה מגודל $n-1 \times n-1$. כעת נגדיר מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n-1\times n}$ להיות $B = (C,0)$ (כלומר $n-1$ העמודות הראשונות של B היא המטריצה C והעמודה האחרונה היא עמודת אפסים) ונקבל כי $BA = CA_n = I$ כנדרש.

(ג) לכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים כי העמודות A בלי העמודה j ית של A ת"ל (כיוון שאחרת $rank(A) \geq n-1$). בהניתן $n-1$ וקטורים $v_1, \dots v_{n-1} \in \mathbb{F}^n$ ת"ל מתקיים גם ש $v_1^i, \dots, v_{n-1}^i$ ת"ל כאשר $v_1^i, \dots, v_{n-1}^i$ מתקבלות מ $v_1, \dots, v_n$ ע"י מחיקת הקורדינאטה ה i ית (כי אם $\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = 0$ אזי בפרט $\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k^i = 0$ לכל i). מכאן שלכל $1 \leq j \leq n$ ולכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים כי עמודות A בלי העמודה j ית של A שמחקנו בכולם את הקורדינטה ה iית ת"ל. אבל זהו בדיוק ההגדרה של עמודות המינור $M_{i,j}$ ולכן נקבל שלכל $1 \leq i,j \leq n$ עמודות $M_{i,j}$ ת"ל, כלומר $M_{i,j}$ אינה הפיכה ולכן $|M_{i,j}| = 0$. ומכאן לפי הגדרת $[adj(A)]_{j,i} = (-1)^{i+j} |M_{i,j}|$ נקבל כי $adj(A) = 0$.