תזכורת

אם $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שדה וקטורי, הדיברגנץ שלו מוגדר ע"י

$$\mathrm{div}\vec{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+...+\frac{\partial F_n}{\partial F_n}$$

הדיברגנץ של שדה וקטורי הוא מדד שינוי שטח/נפח תחת תנועה בשדה.
למשל:

$$\vec{F}\left(x,y\right)=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}=\left(x,y\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{F}=2$$

הגדרה

יהי $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי. ה<u>רוטור</u>(rotor/curl) של $\vec{F}$ הוא גם כן שדה וקטורי, המוגדר ע"י

$$\mathrm{rot}\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

$$\mathrm{curl}\left(\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\det\begin{pmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\imath}-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

הערה

הרוטור $\nabla\times F\left(x\right)$ מעיד על "מידת הסיבוב" של השדה $\vec{F}$ בנקודה X:

- כיוונו מעיד על ציר הסיבוב
- אורכו $|\nabla\times F|$ שווה למהירות הזוויתית כפול 2

ב$\mathbb{R}^2$

ניתן להגדיר רוטור גם בשדה ב$\mathbb{R}^2$ ע"י "שיכון" שלו ב$\mathbb{R}^3$.

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

אם $F\left(x,y\right)=M\left(x,y\right)\hat{\imath}+N\left(x,y\right)\hat{\jmath}$, נוח לחשוב עליו כשדה ב$\mathbb{R}^3$ ע"י

$$F\left(x,y,z\right)=M\hat{\imath}+N\hat{\jmath}+0\hat{k}$$

ואז

$$\operatorname{curl}\left(F\right)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ M\left(x,y\right) & N\left(x,y\right) & 0\end{vmatrix}=\left(0\right)\hat{\imath}+\left(0\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}=\left(0,0,N_x-M_y\right)$$

דוגמה

חשב את הרוטור עבור $F\left(x,y\right)=x^2\hat{\imath}$

פתרון

ע"י הנוסחה:

$$\operatorname{curl}\left(\vec{F}\right)=\left(\frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(0\right)}{\partial y}\right)\hat{k}=2x\hat{k}=\boxed{\left(0,0,2x\right)}$$

הגדרה

עבור שדה סקלרי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, ה<u>לפלסיאן</u> של f הוא

$$\Delta f\equiv\nabla^2 f:=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

דוגמה

חשב את Δf עבור $f\left(x,y\right)=x^2-y^2$

פתרון

$$\Delta f=\frac{\partial^2\left(x^2-y^2\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(x^2-y^2\right)}{\partial y^2}=2+\left(-2\right)=0$$

הערה

פונקציה עם לפלסיאן אפס נקראת פונקציה הרמונית.

פירוש ∇^2

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},...\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+...+\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}=\Delta$$

זהויות חשובות בין האופרטורים השונים

1. $\boxed{\mathrm{curl}\left(\mathrm{grad}\left(f\right)\right)=0}$ $\Leftarrow$ אם $\vec{F}=\nabla f$ (שדה פוטנציאלי) אזי $\mathrm{curl}\left(\vec{F}\right)=0$

הערה: תנאי הכרחי לשדה פוטנציאלי $\vec{F}$ הוא $\mathrm{curl}\left(\vec{F}\right)=0$.
$\mathrm{curl}\left(\vec{F}\right)\neq 0 \Leftarrow$ $\vec{F}$ לא פוטנציאלי.

2. $\mathrm{div}\left(\mathrm{curl}\left(\vec{F}\right)\right)=0$

אינווריאנטיות תחת החלפת קואורדינטות

משדה סקלרי f או שדה וקטורי $\vec{F}$, אפשר:

- דרך קואורדינטות X, להגיע דרך $\begin{matrix} f\left(x\right) \\ \vec{F}\left(x\right)\end{matrix}$, באמצעות ∇_x להגיע לביטוי.
- דרך קואורדינטות X', להגיע דרך $\begin{matrix} f\left(x'\right) \\ \vec{F}\left(x'\right)\end{matrix}$, באמצעות $\nabla_{x'}$ להגיע לביטוי.

האם יש קשר בין הביטויים?

תרגיל

יהי $\{e_1,e_1\}$ בסיס אורתונורמלי עבור $\mathbb{R}^2$, ויהי u שדה סקלרי הנתון בקואורדינטות ע"י הנוסחה $f\left(x,y\right)=x^2$ (כאשר $(x,y)=xe_1+ye_2$).
נבנה בסיס נוסף $\{e'_1,e'_2\}$ ע"י סיבוב הבסיס $\{e_1,e_2\}$ ב־$30°$ נגד כיוון השעון ונקבל מערכת קואורדינטות חדשה (x',y')

1. מצא נוסחת מעבר מ־$\{e_1,e_2\}$ ל־$\{e'_1,e'_2\}$
2. בטא את השדה הסקלרי u כפונקציה של הקואורדינטות (x',y')

3. חשב את הגרדיאנט $\mathrm{grad}\,(u)$ בקואורדינטות (x,y) וגם ב(x',y')

4. חשב את הלפלסיאן Δu בשתי המערכות

פתרון

1. מטריצת סיבוב בθ היא $R\,(\theta)^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^t$

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$e_1' = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = e_1'$$

$$e_2' = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e_2'$$

כדי לתרגם וקטור מקואורדינטות (x,y) לקואורדינטות (x',y') נכפיל במטריצה $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$