פתרון תרגיל בית 10 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך טז' שבט ה'תשע"ז, 12.2.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. עבור חבורה G האם ההעתקה $f_x(g) = gxg^{-1}$ היא אוטומורפיזם של G?

פתרון. לא. $f_x(g_1g_2) = g_1g_2xg_2^{-1}g_1^{-1} \neq g_1xg_1^{-1}g_2xg_2^{-1} = f_x(g_1)f_x(g_2)$.

שאלה 2. תהי G חבורה סופית מסדר ≤ 2. הוכיחו כי $\operatorname{Aut} G \geq 2$.

פתרון. בעצם, צריך להראות שיש אוטומורפיזם של G שאינו הזהות.

אם G אינה אבלית, יהי $a \notin Z(G)$. לכן γ_a, אוטומורפיזם ההצמדה ב-a, הוא אוטומורפיזם של G שאינו הזהות (כי $a \notin Z(G)$), כדרוש.

לכן אפשר להניח ש-G אבלית. נניח $|G| = n$. ראיצם בהרצאה שאם $k \leq n$, $(k,n) = 1$, הפונקציה $f(g) = g^k$ מגדירה אוטומורפיזם של G, והוא לא טריוויאלי (אם $g^k = e$, אזי $o(g) \mid k$. אבל $o(g) \mid n$, ולכן $o(g) = 1$, כלומר $g = e$, בסתירה לנתון). לכן הוכחנו את הדרוש.

שאלות להגשה

שאלה 3. תהי G חבורה. הוכיחו כי אם $\operatorname{Aut} G$ ציקלית אז G אבלית.

פתרון. הוכחה 1: אם $\operatorname{Aut} G$ צקלית אז בפרט התת-חבורה $\operatorname{Inn} G$ היא צקלית. נסמן $\operatorname{Inn} G = \langle \gamma_g \rangle$.

יהיו $a, b \in G$ ונראה $ab = ba$ ע"י כך שנוכיח כי $aba^{-1}b^{-1} = e$.
אמנם

$$
\begin{aligned}
aba^{-1}b^{-1} &= \gamma_a(b)b^{-1} = \gamma_g^k(b)b^{-1} = g^k b g^{-k} b^{-1} \\
&= g^k \gamma_b(g^{-k}) = g^k \gamma_g^m(g^{-k}) = g^k g^m g^{-k} g^{-m} = e
\end{aligned}
$$

הוכחה 2: לפי משפט N/C

$$N(G)/C(G) = G/Z(G) \hookrightarrow \operatorname{Aut}(G)$$

לפי הנתון $\operatorname{Aut}(G)$ צקלית ולכן כל ת"ח שלה היא צקלית, ולכן $G/Z(G)$ ציקלית. לפי טענה מהכיתה אם $G/Z(G)$ צקלית אז G אבלית.

שאלה 4. הוכיחו כי $\operatorname{Aut} S_3 = \operatorname{Inn} S_3 \cong S_3$.

פתרון. ראשית, יש לנו את ההומומורפיזם $f : S_3 \to \operatorname{Aut}(S_3)$ לפי $f(a) = \gamma_a$ (ההצמדה ב-a), שהגרעין שלו הוא $Z(S_3) = \{\mathrm{id}\}$. לכן הוא חח"ע, כלומר קיבלנו שיכון $S_3 \hookrightarrow \operatorname{Aut}(S_3)$.

רוצים להראות שהוא על, כלומר שכל אוטומורפיזם של S_3 הוא פנימי.

יהי $\varphi \in \operatorname{Aut}(S_3)$. כיוון ש-$\varphi$ שומר על סדרי האיברים (כי הוא איזומורפיזם), נקבל ש-φ שולח כל חילוף לחילוף. לצורך נוחות, נמספר את החילופים:

$$1 = (1,2),\ 2 = (1,3),\ 3 = (2,3)$$

לכן נקבל פונקציה $g : \operatorname{Aut}(S_3) \to S_3$, השולחת כל אוטומורפיזם φ לתמורה $g(\varphi)$ שהוא משרה על קבוצת החילופים.

g היא הומומורפיזם, אבל זה לא מה שחשוב; מה שחשוב הוא ש-g חח"ע. מדוע? כיוון שהחילופים יוצרים את S_3, אם שני אוטומורפיזמים ישלחו אותם לאותן תמונות, הם יזדהו בכל S_3. לכן g חח"ע, כלומר $|\operatorname{Aut}(S_3)| \leq |S_3| = 6$.

אבל גם g חח"ע, ולכן $|\operatorname{Aut}(S_3)| \geq |S_3| = 6$, ומכאן ש-$|\operatorname{Aut}(S_3)| = 6$. לכן הפונקציה f היא גם על, כלומר היא איזומורפיזם. לכן $\operatorname{Aut}(S_3) \cong S_3$.

שאלה 5. עבור חבורות G, H הוכיחו כי $\operatorname{Inn}(G \times H) \cong \operatorname{Inn} G \times \operatorname{Inn} H$.

פתרון. נגדיר פונקציה

$$\Phi\colon\ \operatorname{Inn} G \times \operatorname{Inn} H \longrightarrow \operatorname{Inn}(G \times H)$$

ע"י

$$\Phi(\gamma_g, \gamma_h) = \gamma_{(g,h)}$$

כאשר γ_x זה הצמדה באיבר x.

1. נראה ש Φ מוגדר היטב:
ברור ש $\gamma_{(g,h)} \in \operatorname{Inn}(G \times H)$ מההגדרה.
אם $\gamma_g = \gamma_{g'}$ ו $\gamma_h = \gamma_{h'}$ אז

$$\Phi(\gamma_g, \gamma_h) = \gamma_{(g,h)} = \gamma_{(g',h')} = \Phi(\gamma_{g'}, \gamma_{h'})$$

כי לכל $(x,y) \in G \times H$ מתקיים

$$\begin{aligned}\gamma_{(g,h)}(x,y) = (g,h)(x,y)(g,h)^{-1} = (gxg^{-1}, hyh^{-1}) = \\ = (\gamma_g(x), \gamma_h(y)) = (\gamma_{g'}(x), \gamma_{h'}(y)) = \\ = (g',h')(x,y)(g',h')^{-1} = \gamma_{(g',h')}(x,y)\end{aligned}$$

2. נראה ש Φ הומומורפיזם: צריך להראות ש-

$$\Phi\left((\gamma_{g_1}, \gamma_{h_1})(\gamma_{g_2}, \gamma_{h_2})\right) = \Phi(\gamma_{g_1}, \gamma_{h_1})\Phi(\gamma_{g_2}, \gamma_{h_2})$$

נשים לב שמתקיים $\gamma_x\gamma_y = \gamma_{xy}$(כך הראתם בהרצאה ש $\operatorname{Inn} G$ היא ת"ח). ולכן

$$\gamma_{(g_1g_2,h_1h_2)} = \gamma_{(g_1,h_1)(g_2,h_2)} = \gamma_{(g_1,h_1)}\gamma_{(g_2,h_2)}$$

3. נראה ש Φחח"ע: נניח $\mathrm{id} = \Phi(\gamma_g, \gamma_h) = \gamma_{(g,h)}$ אזי $(g,h) \in Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.
$g \in Z(G)$ אומר ש $\gamma_g = \mathrm{id}_G$ ו $h \in Z(H)$ אומר ש $\gamma_h = \mathrm{id}_H$ וסך הכל $(\gamma_g, \gamma_h) = (\mathrm{id}, \mathrm{id})$ הוא האיבר הטריוויאלי.

4. נראה ש Φ על: יהי $\gamma_{(g,h)} \in \operatorname{Inn}(G \times H)$ אזי $\Phi(\gamma_g, \gamma_h) = \gamma_{(g,h)}$.

שאלה 6. החבורה $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ היא מכפלה ישרה למחצה של שתי תת-חבורות שאחת מהן היא $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. מהי תת-החבורה השניה? (כמובן שהתשובה אינה יחידה, כל תשובה נכונה תתקבל).

פתרון. אם$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \rtimes H$ אז $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cong H$.
אבל ידוע ש- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$ ולכן בעצם אנחנו מחפשים עותק של $\mathbb{C}^\times$ ב $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ שנחתך טריוויאלית ומשלים את $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.
נקח את $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{C}^\times \right\}$ זוהי ת"ח שאיזומורפית ל $\mathbb{C}^\times$,
נחתכת טריוויאלית עם $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ו $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})H$ כי כל מטריצה $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

ניתן לרשום כ-

$$A = \underbrace{\frac{A}{\det A}}_{\in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})} \cdot \begin{pmatrix} \det A & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 7. יהיו הומומורפיזמים $f : G \to H$ ו-$g : H \to G$ כך ש-$f \circ g = \mathrm{id}_H$.

1. הזכרו כי g חח"ע ו-f על.
2. הוכיחו כי $G = \ker(f) \rtimes \mathrm{im}(g)$.
3. תהי G סופית וH ת"ח מאינדקס 2. הוכיחו שאם $f \colon G \to H$ אפימורפיזם כך ש $\ker f \nsubseteq H$ אז $G \cong H \times \mathbb{Z}_2$.

פתרון. 1. לפי טענה מהקורס במתמטיקה בדידה.

2. נסמן $K = \ker(f)$ ו-$Q = \mathrm{im}(g)$. ידוע לנו כי $K \lhd G$ ו-$Q \leq G$. נוכיח את הדרישות ממכפלה ישרה למחצה (פנימית). נראה כי $K \cap Q = \{e_G\}$. יהי $x \in K \cap Q$, אז קיים $h \in H$ עבור $x = g(h)$. מפני ש-$x \in K$ מתקיים $f(g(h)) = h$ וגם $f(g(h)) = e_H$. לכן $h = e_H$, ולכן $x = e_G$.
נותר להראות כי $G = KQ$. יהי $x \in G$. נשתמש בכך ש-$e_G = x^{-1}x$. נפעיל את f ונקבל
$$e_H = f(e_G) = f(x^{-1})f(x)$$
על המשוואה הזאת נפעיל את g ונקבל
$$e_G = g(e_H) = g(f(e_G)) = g(f(x^{-1}))g(f(x))$$
נסמן $q = g(f(x))$ ו-$k = x \cdot g(f(x^{-1}))$. ברור כי $q \in Q$ וכי $x = kq = x \cdot e_G$.
כדי להראות ש-$k \in K$ נבדוק שהתמונה שלו תחת f היא e_H. אכן
$$f(x \cdot g(f(x^{-1}))) = f(x)f(g(f(x^{-1}))) = f(x)f(x^{-1}) = f(e_G) = e_G$$
וקיבלנו את הדרוש $x = kq \in KQ$.

3. נסמן $K = \ker f$ אזי לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $G/K \cong H$ (כי f על) ולכן $|K| = \dfrac{|G|}{|H|} = 2$ כך ש $K \cong \mathbb{Z}_2$.
H מאינדקס 2 ולכן נורמלית, וK נורמלית כי זה גרעין.

$K \cap H = \{e\}$ כי אחרת $K \subseteq H$ (הרי בK יש 2 איברים) ונתון שזה לא כך.
בנוסף $G = KH$ כי $H \leq KH \leq G$ ו H מאינדקס 2.
סך הכל קיבלנו שG הוא מכפלה ישרה פנימית של H ו K ולכן $G \cong H \times K \cong H \times \mathbb{Z}_2$.

שאלה 8. תהי G חבורה מסדר $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

1. כמה תת-חבורות 5-סילו יכולות להיות לG?
2. נניח שתת-חבורת 5-סילו Q היא נורמלית אבל לא מרכזית (כלומר לא מוכלת במרכז). מצא את סדר המרכז שלה $C_G(Q)$. (רמז: משפט N/C).
3. נניח שתת-חבורת 5-סילו אינה נורמלית. הוכח שG אינה פשוטה. (רמז: העידון של משפט קיילי).

פתרון. 1. לפי המשפט השלישי של סילו $\begin{cases} n_5 \mid 2 \cdot 3^2 \\ n_5 \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$ ולכן $n_5 = 1, 6$.

2. לפי משפט N/C נקבל $N(Q)/C(Q) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(Q)$.
אבל Q נורמלית ומסדר 5 ולכן $G/C(Q) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5) \cong U_5$ ולפי לגרנז' $[G \colon C(Q)] \mid 4$.
מצד שני $[G \colon C(Q)] \mid |G| = 90$ ולכן בעצם $[G \colon C(Q)] \mid 2$ כלומר $|C(Q)| = 90, 45$.
לא ייתכן ש $C(Q) = G$ כי הנחנו שQ לא מרכזית, ולכן בהכרח $|C(Q)| = 45$.

3. נניח בשלילה ש G פשוטה.
כעת אנחנו מניחים כי $n_5 = 6$ ולכן אם נקח ת"ח 5-סילו Q אזי $[G \colon N(Q)] = 6$.
לפי העידון של קיילי (וההנחה שG פשוטה) יש שיכון $G \hookrightarrow S_6$.
נתבונן ב$G \cap A_6 \lhd G$ היא לא טריוויאלית כי:
כל איבר מסדר 5 של G מיוצג ע"י מחזורים מאורך 5 ולכן תמורה זוגית,
ומצד שני איבר מסדר 2 מיוצג ע"י מכפלה של $3^2 5$ חילופים (טיעון שראינו בתירגול על קיילי).
וכך קיבלנו סתירה לכך שהחבורה פשוטה.

בהצלחה!