

פתרון מבחן לדוגמא – מבוא לאנליזה 2 למורים – 88-612-01

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את:

א.  $\int x^2 \ln(x^2 + x + 1) dx$

ראשית נעשה אינטגרציה בחלקים:

$$\int x^2 \ln(x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3(2x+1)}{x^2 + x + 1} dx$$

כעת נבצע חילוק פולינומים ונקבל כי

$$\frac{x^3(2x+1)}{x^2 + x + 1} = 2x^2 - x - 1 + \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$$

לכן

$$\int \frac{x^3(2x+1)}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2}{3} x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx$$

באינטגרל  $\int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx$  המונה הוא נגזרת המכנה ולכן  $\int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx = \ln(|x^2 + x + 1|)$

סה"כ

$$\int x^2 \ln(x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + x + 1) \right) + C$$

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות  $x, \sqrt{x}$  בקטע  $[0, 2]$

ראשית נמצא את נקודות החיתוך בין שני הגרפים  $x = \sqrt{x}$ .

נעלה בריבוע  $x^2 = x$ , לכן  $x(x-1) = 0$  ונקודות החיתוך הן  $0, 1$ .

נציב  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  ונגלה שבתחום  $[0, 1]$  הפונקציה  $\sqrt{x}$  גבוהה יותר מ  $x$  ובתחום  $[1, 2]$  ההפך.

לכן השטח הכלוא הוא:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx + \int_1^2 (x - \sqrt{x}) dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

א. מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה  $\frac{x \cdot \arctan(x)}{\ln(1+x^4)}$

אסימפטוטות אנכיות:

הפונקציה אינה רציפה ב  $x = 0$  ונקודה זו חשודה לאסימפטוטה אנכית.

נחשב את הגבול בנקודה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arctan(x)}{\ln(1+x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\ln(1+x^4)} \frac{\arctan(x)}{x} \frac{1}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \infty = \infty$$

לכן יש אסימפטוטה אנכית  $x = 0$ .

אסימפטוטה משופעת מימין:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{\ln(1+x^4)} = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \arctan(x)}{\ln(1+x^4)} - 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(1+x^4)} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^4}{4x^3} = \infty$$

נחשב את הגבול  $\infty$

לכן  $n = \frac{\pi}{2} \cdot \infty = \infty$  ואין אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל:

$$m = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{\arctan(x)}{\ln(1+x^4)} = 0$$

כעת בעזרת חישוב דומה

$$n = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{x \cdot \arctan(x)}{\ln(1+x^4)} - 0 = -\infty \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

ושוב אין אסימפטוטה אנכית. זה לא מפתיע, כיוון שהפונקציה זוגית.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx$

נבצע הצבה

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{t^2} dx$$

ידוע שהאינטגרל שקיבלנו מתכנס.

3.

א. חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^{\ln(x)} \frac{1}{t} dt}{\ln(x)}$

ראשית, ידוע כי  $\int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt = \infty$  ולכן המונה שואף לאינסוף.

כיוון שגם המכנה שואף לאינסוף, נשתמש בכלל לופיטל ונקבל כי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^{\ln(x)} \frac{1}{t} dt}{\ln(x)} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} - 0}{\frac{1}{x}} = 0$$

ב. חשבו את גבול הסדרה  $a_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$

נראה כי אלה סכומי רימן של הפונקציה הרציפה  $f(x) = x^3$

$$a_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{k}{n} \right)^3 \rightarrow \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

א. חשבו את  $\int_0^1 e^{(x^3)} dx$  עד כדי שגיאה של  $h = 0.01$

$$\text{ידוע כי } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ לכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{לכן } e^{(x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$$

$$\text{לכן } \int_0^1 e^{(x^3)} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{3n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)n!}$$

$$\text{נבחר ש } \int_0^1 e^{(x^3)} dx \approx \sum_{n=0}^5 \frac{1}{(3n+1)n!} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7 \cdot 2!} + \frac{1}{10 \cdot 3!} + \frac{1}{13 \cdot 4!} + \frac{1}{16 \cdot 5!}$$

את זה.

ידוע כי  $n! \geq 2^{n-1}$  לכל  $n \geq 1$  ולכן נחסום את השגיאה:

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)n!} \leq \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{19 \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{19} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{19 \cdot 2^5} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{2}{19 \cdot 2^5} = \frac{1}{304} < 0.01$$

שימו לב כי  $3n+1 \geq 19$  כיוון ש  $n \geq 6$ .

ב. מצאו את  $f^{(57)}(0)$  עבור  $f(x) = e^{(x^3)}$

$$\text{חישבנו כבר את טור הטיילור } e^{(x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$$

$$\text{המקדם של } x^{57} \text{ הוא } \frac{1}{19!} \text{ ולכן } \frac{f^{(57)}(0)}{57!} = \frac{1}{19!} \text{ ולכן } f^{(57)}(0) = \frac{57!}{19!}$$

5. יהיו שני טורי חזקות  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  עם רדיוסי התכנסות  $r_1, r_2$

א. הוכיחו/הפריכו: רדיוס ההתכנסות של  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$  הוא  $\min\{r_1, r_2\}$

הפרכה:

הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  מתכנס בתחום  $|x| < 1$  ולכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא  $r = 1$  וכך כמובן גם המצב עבור מינוס

הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} -x^n$ .

טור הסכום הוא  $\sum_{n=0}^{\infty} 0$  המתכנס בכל הממשיים ולכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא  $\infty \neq \min\{1, 1\}$

ב. נתון כי  $r_1 \neq r_2$ . הוכיחו את הטענה בסעיף א'

הוכחה:

נניח כי  $r_1 > r_2$ . לכן בתחום  $|x| < r_2$  שני הטורים מתכנסים, ולכן גם הסכום שלהם מתכנס.

בתחום  $r_2 < |x| < r_1$  טור אחד מתכנס, והשני מתבדר, ולכן הסכום שלהם מתבדר.

לכן  $r_2 = \min\{r_1, r_2\}$  הוא המספר הגדול ביותר כך שסכום הטורים מתכנס עבור  $|x|$  שקטן ממנו, כלומר הוא רדיוס ההתכנסות של הטור.

שימו לב, הוכחה זו לא עובדת בסעיף א', כי במצב ש  $r_1 = r_2$  בתחום  $r_1 < |x|$  שני הטורים מתבדרים וייתכן שהסכום שלהם דווקא מתכנס, כמו שראינו בדוגמא.