בס"ד

20.7.14

שיטות נומריות - תרגול 3

שגיאת התבטלות: (חיסור מספרים קרובים)

כאשר נחשב חיסור של שני מספרים קרובים, נקבל שגיאה יחסית גדולה כיוון שמס' ספרות משמעותיות גדול מתבטל.

דוגמא:

$$1.23456789-1.23400000=0.00056789=0.56789\cdot10^{-3}$$

ועם מחשב עם 6 ספרות משמעותיות:

$$1.23456-1.23400=0.00056$$

מסקנה:

נשתדל להמנע ככל האפשר מחיסור מספרים קרובים.

דוגמא:

מבוקש להקטין את השגיאה בחישוב החיסור הבא:

$$\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}$$

פיתרון:

נקבל שגיאת התבטלות עבור $|a|$ מאוד קטן - $a\sim0$.

פתרון 1- ע"י הכפלה בצמוד:

$$\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}=\frac{(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a})}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}=$$

$$=\frac{1+a-1+a}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}=\frac{2a}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}$$

פתרון 2- ע"י פיתוח טיילור: $f_{(0)}=\sqrt{1+a}=1$ $\quad f(x)=\sqrt{1+x}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{4(\sqrt{1+x})^3}\Big|_{x=0}=-\frac{1}{4}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{12\sqrt{(1+x)^5}}\Big|_{x=0}=\frac{1}{12}$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

$$f(x)\sim1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{72}x^3+\dots$$

$$f(a)=\sqrt{1+a}=1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{72}a^3+\dots$$

$$-\;f(-a)=\sqrt{1-a}=1-\frac{1}{2}a-\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{72}a^3+\dots$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}=\boxed{a+\frac{a^3}{36}+\dots}$$

דוגמא:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x}-\sin\sqrt{x}$. נרצה לחשב את ערכה בנק' $x\approx 0$. נמצא דרך לעשות זאת.

פתרון:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots$$

$$\left[\frac{\sqrt{x}}{1-x}=\sqrt{x}+x^{1\frac{1}{2}}+x^{2\frac{1}{2}}+x^{3\frac{1}{2}}+\dots\right.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$\left[\sin\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{x^{1\frac{1}{2}}}{6}+\frac{x^{2\frac{1}{2}}}{120}\right.$$

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x}-\sin\sqrt{x}=\frac{7}{6}\cdot x^{1\frac{1}{2}}+\frac{119}{120}x^{2\frac{1}{2}}+\dots$$

דוגמא:

נתונה הפונקציה $\sqrt{x^2+1}-x$. זהה מאילו מקרים ישנה בעיית התבטלות והצע דרך חלופית לחישוב הפונקציה.

פתרון:

ישנה בעיית התבטלות עבור x-ים גדולים. $\sqrt{x^2+1}\sim x$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

בס"ד

שורש של משוואה:

הגדרה:

x_0 ייקרא שורש של הפונקציה $f(x)$ אם $f(x_0)=0$.

x_0 ייקרא **שורש פשוט** של הפונקציה $f(x)$ אם $f(x_0)=0$ וגם $f'(x_0)\neq 0$.

x_0 ייקרא שורש מריבוי מסדר n של הפונקציה $f(x)$ אם:

$$\begin{cases} f(x_0)=f'(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0 \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$$

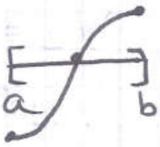
פתרון משוואות לא ליניאריות:

$f(x)=e^{2x}-x\cos^2x$ - אין דרך אנליטית למצוא x_0 שורש של $f(x)$.

הפתרון: נמצא קירוב לפתרון בשיטה איטרטיבית.

תזכורת:

משפט ערך הביניים של קושי: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$.
אם $f(a)\cdot f(b)<0$ אזי קיימת נק' $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=0$



שיטת החציה:

אם אנחנו יודעים שהשורש נמצא בקטע $[a,b]$ נתבונן באמצע הקטע ונמצא תחום קטן בחצי שהשורש נמצא בתוכו.

בשיטת החציה - ההתכנסות ליניארית ושיעור ההתכנסות $=\frac{1}{2}$.

יתרונות וחסרונות לשיטת החצ"ה:

יתרונות:

בבחירת קטע מתאים השיטה תמיד מתכנסת.

חסרונות:

- ההתכנסות יחסית איטית (ליניארית)
- אם נבחר את אחד מקצות הקטע קרובים לשורש - זה יאט את קצב ההתכנסות.
- אם הפונקציה רק נושקת לציר ה-x, לא נוכל להפעיל את השיטה $\Leftarrow$

הערה - צריך לבדוק שהפונקציה רציפה.

באופן כללי:

כיצד נמצא קטע מתאים שבו $f(a)\cdot f(b)<0$ והפונקציה רציפה?

א. ננחש ונבדוק

ב. בעזרת מטלב.

דוגמא:

נניח שנרצה לקבל תצוגה גרפית של הפונקציה הבאה:

$f(x)=3\cos x+\frac{x^2}{e^x}$ בקטע $[0,5]$

הפקודות במטלב:

```
>> x=[0:0.1:5]
>> y=3*cos(x)+x.^2/exp(x)
>> plot(x,y)
>> gridon( "יראה את התמונה")
```

האלגוריתם:

1. בוחרים קטע כלשהו $[x_0,x_1]$ כך ש- $f(x_0)\cdot f(x_1)<0$
2. נחשב $x_2=\frac{x_0+x_1}{2}$
3. אם $f(x_2)=0$ אז סיימנו.
4. אם $f(x_0)\cdot f(x_2)<0$ המשך עם הקטע $[x_0,x_2]$
5. אחרת המשך עם הקטע $[x_2,x_1]$

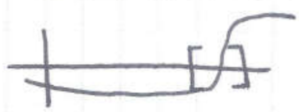
← חזור ל-2.

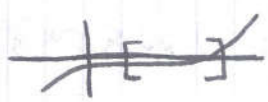
תנאי עצירה אפשריים:

א. $|f(x_2)|<\varepsilon$ - הפונקציה קרובה ל-0 עד כדי ε.

ב. $|x_0-x_1|<\delta$ - הגענו לקטע קטן מאוד שבתוכו נמצא השורש.

ג. $N<K$ כאשר K הינו מס' איטרציות - חזרנו על התהליך מספר רב של פעמים)

 ← במקרה זה תנאי ב' יתאים.

 ← במקרה זה תנאי א' יכול להתאים יותר.

בס"ד

דוגמא:

השתמשו בשיטת החצייה בשביל למצוא קירוב ל- $\sqrt{11}$, כך ש-

$$|f(x)|<0.4$$

פתרון:

נגדיר פונקציה $f(x)=x^2-11$ (ידוע שהשורש נמצא בקטע $[3,4]$.

n	x_0	x_1	x_2	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	3	4	3.5	-2	5	1.25
2	3	3.5	3.25	-2	1.25	-0.4375
3	3.25	3.5	3.375	-0.4375	1.25	$0.391<0.4$

$\Rightarrow x_0 \sim 3.375$

סדר ושיעור התכנסות:

הגדרה:

עבור סדרת קירובים $x_1, x_2, \ldots$ המתכנסת לערך Z אם קיימים $p\geq 1$ ו- $c>0$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{Z-x_{n+1}}{|Z-x_n|^p}=c$. אזי p נקרא סדר התכנסות ו- c נקרא שיעור התכנסות. בין שתי שיטות - זו שיש לה סדר התכנסות גבוה יותר, תהיה מהירה יותר, במקרה שבו סדר ההתכנסות של שתיהן שווה - זו שיש לה שיעור התכנסות נמוך יותר תהיה מהירה יותר.

$$\lim \frac{Z-x_{n+1}}{|Z-x_n|} \leq \frac{1}{2}. \quad C=\frac{1}{2},\ p=1$$

כאשר $p=1$ נאמר שההתכנסות היא לינארית.

$p=2$ - התכנסות ריבועית.

$p>1$ - התכנסות סופר לינארית.