מערך תרגול 4 מופשטת 3

תרגיל 4.1 מצאו את שדה הפיצול של x^5-2 מעל $\mathbb{Q}$. ואת המימד.

פתרון: אם $\rho = e^{\frac{2\pi i}{5}}$אז השורשים של הפולינום הם

$$\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2}\rho, \ldots, \sqrt[5]{2}\rho^4$$

ולכן שדה הפיצול הוא

$$E = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2}\rho, \ldots, \sqrt[5]{2}\rho^4)$$

קל לבדוק ש

$$\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2}\rho, \ldots, \sqrt[5]{2}\rho^4) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \rho)$$

וקל לבדוק ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}] = 5$$

כמו כן, נשים לב ש x^5-1 מאפס את ρ אבל הוא כמובן לא הפולינום המינימלי כי הוא לא פריק. אבל

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

ו

$$x^4+x^3+x^2+x+1$$

הוא כן פולינום אי פריק (אני מקווה שהוכחתם את זה בתורת החוגים, זה נכון לכל $p-1$ כאשר p ראשוני). ולכן

$$[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = 4$$

היות ש $\gcd(4,5) = 1$אז לפי תרגיל משבוע שעבר

$$[E : \mathbb{Q}] = 20$$

תרגיל 4.2 מצאו את שדה הפיצול של $x^4 - 4x^2 - 1$ מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון: צריך בסך הכל למצוא את השורשים. מציבים $t = x^2$ ופותרים כרגיל. מגלים שהשורשים הם

$$\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}, \pm\sqrt{2-\sqrt{5}}$$

ולכן שדה הפיצול הוא

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2-\sqrt{5}})$$

תרגיל 4.3 הוכיחו כי x^4-4x^2-1 הוא אי פריק מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון: דרך א': ברור שאין לו שורשים ב $\mathbb{Q}$ (כבר מצאנו את השורשים). אז נשאר לוודא שהוא לא מתפרק למכפלת פולינומים ממעלה 2. אבל אנחנו כבר יודעים ש

$$x^4-4x^2-1=(x-\sqrt{2+\sqrt{5}})(x+\sqrt{2+\sqrt{5}})(x-\sqrt{2-\sqrt{5}})(x+\sqrt{2-\sqrt{5}})$$

וקל לבדוק שכל כפולה של שני פולינומים מכאן לא נותנת פולינום מעל $\mathbb{Q}$.

דרך ב': כמו שעשיתם בשיעורי הבית מראים ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}):\mathbb{Q}]=4$$

ולכן הפולינום המינימלי של $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ הוא ממעלה 4 ולכן x^4-4x^2-1 מינימלי ולכן אי פריק.

תרגיל 4.4 חשבו את $[E=\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}},\sqrt{2-\sqrt{5}}):\mathbb{Q}]$

פתרון: כבר ראינו $[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}):\mathbb{Q}]=4$ נשאר לבדוק מהו

$$[E:\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})]=?$$

ראשית ברור שזה לא 1 כי

$$\sqrt{2-\sqrt{5}}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$$

(הוא מספר מרוכב ו $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ מוכל ב $\mathbb{R}$).

מצד שני, נשים לב ש $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ ולכן

$$x^2-2+\sqrt{5}$$

פולינום מאפס של $\sqrt{2-\sqrt{5}}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ ולכן

$$[E:\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})]=2$$

ו

$$[E:\mathbb{Q}]=8$$

תרגיל 4.5 כמה תתי שדות יש ל $\mathbb{C}$ שאיזומורפיים ל $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$?

פתרון: אם $K\subseteq\mathbb{C}$ הוא שדה כך ש $f:\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})\to K$ הוא איזומורפיזם. אז בהכרח f מקבעת את $\mathbb{Q}$. וכמו כן $f(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ בהכרח נשלח לשורש של x^4-4x^2-1 שזה פולינום עם 4 שורשים בסך הכל. מכאן מסיקים שאחד מבין

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})\cong\mathbb{Q}(-\sqrt{2+\sqrt{5}})\cong\mathbb{Q}(\sqrt{2-\sqrt{5}})\cong\mathbb{Q}(-\sqrt{2-\sqrt{5}})$$

מוכל ב K. לכן הוא צריך להיות שווה ל K משיקולי מימד. כעת נשים לב שהשניים הימניים והשמאליים למעשה שווים. אז יש רק 2 תתי שדות שאיזומורפיים והם

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2-\sqrt{5}})$$

וכבר ראינו שאלה שדות שונים. ובזה סיימנו.

הגדרה 4.6 אם $F, L \subseteq K$ קיים קיים תת שדה מינימלי שמכיל את F, L והוא מסומן בדר"כ FL.

תרגיל 4.7 יהי $f(x)$ פולינום אי פריק ממעלה 7 מעל $\mathbb{Q}$. יהי $\alpha \in \mathbb{C}$ שורש של f. חשבו את

$$[\mathbb{Q}(\alpha^3+\alpha) : \mathbb{Q}]$$

פתרון: ברור ש

$$\mathbb{Q}(\alpha^3+\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$$

אבל המימד של $\mathbb{Q}(\alpha)$ הוא ראשוני ולכן משיקולי מימד $\mathbb{Q}(\alpha^3+\alpha) = \mathbb{Q}$ או $\mathbb{Q}(\alpha^3+\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)$. נניח ש

$$\mathbb{Q}(\alpha^3+\alpha) = \mathbb{Q}$$

זה אומר ש

$$\alpha^3+\alpha = q \in \mathbb{Q}$$

אבל אז

$$x^3+x-q$$

פולינום מאפס עבור α בסתירה לכך שהפולינום המינימלי מדרגה 7. ולכן בהכרח

$$\mathbb{Q}(\alpha^3+\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)$$

והמימד הוא 7.