

שיעורי בית 6

18 בדצמבר 2016

1. תהא G חבורה ו $H \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. הוכח/הפרך

(א) אם G ציקלית גם G/H ציקלית.

(ב) אם G/H ציקלית גם G ציקלית.

2. נתון: $H_2 \trianglelefteq G_2$ וגם $H_1 \trianglelefteq G_1$. הוכח:

(א) $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$

(ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$

3. תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי

$$\forall x \in N, y \in K : xy = yx$$

[הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$]

4. תהא G חבורה ו $N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית המקיימת $|G/N| = p$ כאשר p מספר ראשוני.

(א) הוכיחו לכל $g \in G - N$ מתקיים כי g, g^2, \dots, g^p נציגים של מחלקות שונות ב G/N (ולכן $G/N = \{g^i N : 1 \leq i \leq p\}$)

(ב) הוכיחו כי אם בנוסף $N \subseteq Z(G)$ (כלומר N מוכלת במרכז של G) אזי G חבורה חילופית (או מילים אחרות $Z(G) = G$).

5. תהא G חבורה חילופית. נגדיר $D = \{(g, g) : g \in G\} \subseteq G \times G$. הוכיחו כי זהו תת חבורה נומאלית של $G \times G$ והראו כי

$$G \times G / D \cong G$$

6. תהא G_1, G_2 שתי חבורות עם סדרים זרים (כלומר $\gcd(|G_1|, |G_2|) = 1$). הוכיחו כי קיים הומו' אחד $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ [רמז: חישבו על התמונה $\phi(G_1)$]

7. נגדיר $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ מעגל היחידה עם פעולת כפל. הוכיחו כי

$$(א) \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong G \text{ [הדרכה: השתמשו בפונקציה } e^{2\pi xi}]$$

(ב) נגדיר $H \leq G$ להיות כל שורשי היחידה מסדר כלשהו. כלומר

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

כאשר $U_n = \{z \in G : z^n = 1\}$ הם שורשי היחידה מסדר n . בעזרת סעיף קודם, הראו כי H איזומורפית ל \mathbb{Q}/\mathbb{Z}