בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מספרי הקורס: 88211
המרצה: מיכאל מגרל
המתרגלים: לואי פולב ודורון פרלמן
מועד ב'
חומר עזר: רק מחשבון רגיל
משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לפתור בדיוק 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה 25 נקודות)
בנוסף יש גם שאלת בונוס השווה 5 נקודות.

השאלות:

1. א. הוכיחו שכל חבורה G עם $|G|=p^n$ איברים (p ראשוני) תמיד פתירה.
ב. תהא G חבורה מסדר p^2q עבור p,q ראשוניים. הוכיחו ש- G לא פשוטה.
ג. הוכיחו ש G/H אבלית אם"ם $G'\subseteq H$.

2. א. הוכיחו את משפט Lagrange.
ב. הוכיחו שאם $f:X\to Y$ אפימורפיזם של חבורות סופיות אזי $|Y|$ מחלק את $|X|$.
ג. הוכיחו שבחבורה A_4 לא קיימת ת"ח עם 6 איברים.

3. א. נניח G חבורה מסדר p^2 כאשר p ראשוני. הוכיחו ש- G אבלית ומתקיים $|Aut(G)|>p^2-2p$.
ב. הוכיחו או הפריכו: $\mathbb{C}^*/T\cong\mathbb{R}$ $\mathbb{R}/\mathbb{Q}\cong T/\Omega_\infty$
(כאשר $T:=\{z\in C \mid \|z\|=1\}$ ו Ω_∞ חבורה של כל שורשי יחידה).
ג. עבור החבורה $G:=U_{10}\times\mathbb{Z}_{35}$ תארו תמונות אפימורפיות ומצאו $|Aut(G)|$.

4. א. נתבונן ב- S_6 ובקבוצה הבאה: $H=\{\sigma\in S_6:\sigma(2)=2,\sigma(4)=4,\sigma(6)=6\}$.
הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3.
ב. האם היא תת חבורה נורמלית?
ג. הוכיחו שב- $N(H)$ יש שתי תת-חבורות K,L – כך ששתיהן איזומורפיות ל- S_3 ו- $L\cap K=\{id\}$.

5. א. הוכיחו את משפט Burnside.
ב. מצאו את מספר הלוחות 4×4 הלא שקולים עד כדי סיבובים אם מותר לצבוע ב 3 צבעים קבועים.
ג. הוכיחו שכל פעולה $G\times X\to X$ עם מסלול אחד איזומורפית לפעולה מהטיפוס $G\times G/H\to G/H,\quad (g,tH)\mapsto (gt)H$.

שאלת הבונוס: (5 נקודות)
נניח S_p חבורה סימטרית כאשר p ראשוני.
א. מצאו כמה ת"ח מסדר p קיימות ב S_p.
ב. באמצעות (א) הוכיחו $p\mid(p-1)!+1$ (משפט Wilson).

בהצלחה ושנה טובה ! ☺