

תרגיל מספר 1 בהסתברות ותהליכים סטוכסטיים, תשע"ח

1. יהיו X_n, Y_n סדרות של משתנים מקריים בלתי תלויים שמקיימות $X_n \sim \text{Poi}(1), Y_n \sim \text{Poi}(n)$
- מה ההסתברות ש $X_n = 1$ עבור אינסוף ערכים של n ?
 - מה ההסתברות ש $Y_n = 1$ עבור אינסוף ערכים של n ?
 - ג.

2. תהי X_1, X_2, X_3, \dots סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה בקטע $[0,1]$. תהי Y_1, Y_2, Y_3, \dots סדרת משתנים מקריים המקיימים $Y_n = X_n X_{n+1}$.

(א) האם קיימים אינסוף X_n , המקיימים $X_n < \frac{1}{n}$?

(ב) האם קיימים אינסוף X_n , המקיימים $X_n < \frac{1}{n^2}$?

(ג) האם קיימים אינסוף Y_n , המקיימים $Y_n < \frac{1}{8n}$?

3. הוכיחו את ההרחבה הבאה של בורל-קנטלי: (התנצלות מראש על ה typesetting המכוער)

אם $P(A_n) \rightarrow 0$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c \cap A_{n+1}) < \infty$ אז $P(\limsup A_n) = 0$.

4. יהיו $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מספרים ממשיים בקטע $[0,1]$. ותהי $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת מספרים חיוביים המקיימת $\sum b_n < \infty$. הראו, שקיים $x \in [0,1]$ המקיים $\sum (b_n^2 / |x - a_n|) < \infty$.
- רמז – הגרילו את x , הגדירו מאורעות מתאימים והשתמשו בבורל-קנטלי.