מבוא לאנליזה מתקדמת מועד א'

עליכם לענות על כל השאלות.
בכל שאלה, הראו את כל הדרך שעשיתם ונמקו כל שלב.
משקל כל שאלה־ 20 נקודות.
בהצלחה!

1. פתרו את המשוואה הבאה:

$$z^2+(4+i)z+5+5i=0$$

פתרון:

$$z_{,2}=\frac{-4-i\pm\sqrt{(4+i)^2-4(5+5i)}}{2}=\frac{-4-i\pm\sqrt{16+8i-1-20-20i}}{2}=\frac{-4-i\pm\sqrt{-5-12i}}{2}$$

כעת, נחשב: $\sqrt{-5-12i}$. נציב: $(a+bi)^2=-5-12i$.

$$\begin{cases}a^2-b^2=-5\\2ab=-12\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b=\frac{-6}{a}$, נציב במשוואה הראשונה ונקבל $a^2-(\frac{-6}{a})^2=-5\Rightarrow a^4+5a^2-36=0$. פתרונות המשוואה הדו ריבועית הזו הם: $a^2=4$ או $a^2=-9$ שלא אפשרי. לכן נקבל $a=\pm 2$, ובהתאמה, $a=2\Rightarrow b=-3, a=-2\Rightarrow b=3$ (מסמנים את זה $b=\mp 3$, קודם המינוס ואז הפלוס...). בסה"כ: $z=\pm(2-3i)$.

נקבל $\sqrt{-5-12i}=\pm 2-3i$, ולכן:

$$z_{1,2}=\frac{-4-i\pm(2-3i)}{2}\Rightarrow z_1=-1-2i, z_2=-3+i$$

2. חשבו את הענף העיקרי של $\ln(4-4i)$.
פתרון:

$$\ln(4-4i)=\ln|4-4i|+i\theta=\ln\sqrt{32}+i(-\frac{\pi}{4})$$

3. הוכיחו: לכל מס' מרוכב $z\in\mathbb{C}$, מתקיים: $\cos(\pi-z)=-\cos(z)$.
פתרון:

$$\cos(\pi - z) = \frac{e^{i(\pi-z)} + e^{-i(\pi-z)}}{2} = \frac{e^{\pi i}e^{-iz} + e^{-i\pi}e^{iz}}{2} = \frac{-e^{-iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -\cos z.$$

השוויון השלישי נובע מהעובדה ש: $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$.

4. בדקו האם הפונקציה הבאה גזירה. במידה והיא גזירה, חשבו את הנגזרת.

$$f(x+iy) = e^{x+2}\cos(y+1) + ie^{x+2}\sin(y+1)$$

פתרון:

נבדוק אם הפונקציה מקיימת את משוואות קושי־רימן.

$U = e^{x+2}\cos(y+1), V = e^{x+2}\sin(y+1)$

$U_x = e^{x+2}\cos(y+1)$

$U_y = -e^{x+2}\sin(y+1)$

$V_x = e^{x+2}\sin(y+1)$

$V_y = e^{x+2}\cos(y+1)$

מתקיים: $U_x = V_y, U_y = -V_x$.

לכן הפונקציה גזירה, ונגזרתה היא:

$$f' = U_x + iV_x = e^{x+2}\cos(y+1) + ie^{x+2}\sin(y+1) = f$$

5. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאה:

$$y'' - 2y' = 3x + 4$$

פתרון:

ראשית, נמצא פתרון כללי למד"ר ההומוגנית המתאימה: $y'' - 2y' = 0$.

ובכן, המשוואה האופיינית היא: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, ופתרונותיה הם: $\lambda = 0, 2$. לכן הפתרון הכללי להומוגנית שווה ל $y = c_1 + c_2e^{2x}$.

כעת, ננחש פתרון פרטי למד"ר הלא הומוגנית. מכיוון ש$c = 0$, ננסה פתרון מהצורה: $y_p = ax^2 + bx$.

נגזור: $y_p' = 2ax + b, y_p'' = 2a$.

נציב: $2a - 2(2ax + b) = 3x + 4$.

$-4a = 3$

$2a - 2b = 4$.

לכן: $a = -\frac{3}{4}$ ו $b = -\frac{11}{4}$.

לסיכום, הפתרון הכללי של המד"ר הלא הומוגנית הוא: $y = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{4}x$.

6. מצאו פתרון למד"ר $y' = \dfrac{2x}{y^2 + x^2y^2}$ שעובר בנקודה: $(0,2)$

פתרון:

זוהי מד"ר פרידה.

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{y^2}.$$

$\dfrac{1}{y^2} \neq 0$ ולכן אין פתרונות סינגולריים.

נמצא פתרונות רגילים:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$y^2 dy = \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\int y^2 dy = \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \ln(1+x^2) + c$$

$$y = \sqrt[3]{3\ln(1+x^2) + 3c}$$

כעת נציב את הנקודה:

$$2 = \sqrt[3]{3\ln 1 + 3c}$$

$$2 = \sqrt[3]{3c}$$

$$c = \frac{8}{3}$$

כלומר, הפתרון הפרטי הוא: $y = \sqrt[3]{3\ln(1+x^2) + 8}$