מד"ר - הרצאה 8

25 באוגוסט 2011

תש"ע מועד א'

.1

$$y^{''}+p\left(x\right)y^{'}+q\left(x\right)y=0$$

$y_{1},\,y_{2}$ פתרונות בת"ל.
<u>הוכחה א':</u>
אם $y_{1},\,y_{2}$ מקבלים מקסימום בc אז

$$\begin{aligned}y_{1}^{'}\left(c\right) & = & 0\\ y_{2}^{'}\left(c\right) & = & 0\end{aligned}$$

כיוון שהם מהווים בסיס למרחב הפתרונות (מד"ר מסדר 2) אזי כל פתרון y ניתן לכתיבה בצורה

$$y=c_{1}y_{1}+c_{2}y_{2}$$

אזי

$$y^{'}\left(c\right)=c_{1}y_{1}^{'}\left(c\right)+c_{2}y_{2}^{'}\left(c\right)=0$$

לכן לכל הפתרונות

$$y^{'}\left(c\right)=0$$

ולכן לא קיים פתרון המקיים

$$y^{'}\left(c\right)=1$$

בסתירה למשפט הקיום והיחידות.
<u>הוכחה ב':</u>
אם $y_{1},\,y_{2}$ מקבלים מקסימום בc אז

$$\begin{aligned}y_{1}^{'}\left(c\right) & = & 0\\ y_{2}^{'}\left(c\right) & = & 0\end{aligned}$$

אם

$$y_{1}\left(c\right)=y_{2}\left(c\right)=0$$

אז קיבלנו שני פתרונות עם אותו ערך של הפונק' ושל הנגזרת בנק' c.
אבל נניח $y_{1}\left(c\right)\neq=0$ אזי

$$y\left(x\right)=\frac{y_{2}\left(c\right)}{y_{1}\left(c\right)}y_{1}\left(x\right)$$

גם פתרון המקיים:

$$y\left(c\right)=\frac{y_{2}\left(c\right)}{y_{1}\left(c\right)}y_{1}\left(c\right)=y_{2}\left(c\right)$$

אזי יש שני פתרונות בת"ל עם אותו ערך של הפונק' ושל הנגזרת בנק' c.
<u>הוכחה ג':</u>
מתקיים

$$y_1^{'}(c) = y_2^{'}(c) = 0$$

אז

$$W(c) = \begin{vmatrix} y_1(c) & y_2(c) \\ y_1^{'}(c) & y_2^{'}(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(c) & y_2(c) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

לכן y_1, y_2 ת"ל, סתירה.

2. נסמן E האנרגיה של המכונית, אזי:

$$T = cE$$

$$\begin{aligned} dE &= [s - a(T - T_e)]\, dt \\ \frac{dE}{dt} &= s - a(T - T_e) \\ \frac{1}{c}\frac{dT}{dt} &= s - a(T - T_e) \\ \frac{dT}{dt} &= c \cdot s - c \cdot a(T - T_e) \\ \frac{dT}{cs - ca(T - T_e)} &= dt \\ -\frac{\ln|cs - ca(T - T_e)|}{ca} &= t + k \\ cs - ca(T - T_e) &= ke^{-cat} \\ T &= T_e + \frac{s}{a}\left(1 - ke^{-cat}\right) \end{aligned}$$

אזי

$$\lim_{t\to\infty} T = T_e + \frac{s}{a}$$

3.

$$y^{''} + y = \frac{1}{\cos x}$$

נפתור הומוגנית:

$$\begin{aligned} y^{''} + y &= 0 \\ y_h &= c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ y &= c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x \end{aligned}$$

אז יש לנו נוסחה לקבל מערכת משוואות:

$$\begin{aligned} c_1^{'} \cos x + c_2^{'} \sin x &= 0 \\ -c_1^{'} \sin x + c_2^{'} \cos x &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{'} \\ c_2^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

נשתמש בשיטת קרמר:

$$\begin{aligned}
c_1^{'} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-\tan x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\tan x \\
c_2^{'} &= \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = 1
\end{aligned}$$

נמצא את c_1, c_2 ונציב.

4. דרך א':

$$\begin{aligned}
y \cdot y^{''} &= 3 - \left(y^{'}\right)^2 \\
yy^{''} + \left(y^{'}\right)^2 &= 3 \\
\left(yy^{'}\right)^{'} &= 3 \\
yy^{'} &= 3x + c_1 \\
ydy &= (3x + c_1)\, dx \\
\frac{y^2}{2} &= \frac{3}{2}x^2 + c_1 x + c_2 \\
y^2 &= 3x^2 + c_1 x + c_2 \\
y &= \pm\sqrt{3x^2 + c_1 x + c_2}
\end{aligned}$$

דרך ב':

$$p = y^{'}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dx} &= \frac{d}{dx}p = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\
y\frac{dp}{dy}p &= 3 - p^2
\end{aligned}$$

פותרים ומקבלים את y כפונק' של p, ואז מציבים $p = y^{'}$ ומקבלים את y כפונק' של x.

$$\begin{aligned}
y\frac{dp}{dy}p &= 3 - p^2 \\
\frac{pdp}{3 - p^2} &= \frac{dy}{y} \\
\int \frac{pdp}{p^2 - 3} &= -\int \frac{dy}{y} \\
\frac{1}{2}\ln\left|p^2 - 3\right| &= -\ln y + c \\
\sqrt{|p^2 - 3|} &= \frac{c}{y} \\
\left|p^2 - 3\right| &= \frac{c^2}{y^2} \\
p^2 - 3 &= \frac{c_1}{y^2} \\
\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \frac{c_1}{y^2} + 3
\end{aligned}$$

5. הפתרונות הם:

$$\begin{aligned} y_1 &= \ln x \\ y_2 &= e^{-x} \end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} (\ln x)'' + p(x)(\ln x)' + q(x)\ln x &= 0 \\ \left(e^{-x}\right)'' + p(x)\left(e^{-x}\right)' + q(x)e^{-x} &= 0 \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} + \frac{p}{x} + q\ln x &= 0 \\ e^{-x} - e^{-x}p + qe^{-x} &= 0 \\ 1 - p + q &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו זוג משוואות עבור $p,\ q$, פשוט פותרים.

6. מערכת:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_t' = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} &= (-4-\lambda)^3 + 2^3 + 2^3 - 2^2 \cdot 3 \cdot (-4-\lambda) \end{aligned}$$

נמצא ע"ע, וקטורים עצמיים, ונציב בנוסחה:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \overrightarrow{v_1} e^{-\lambda_1 t} + c_2 \overrightarrow{v_2} e^{-\lambda_2 t} + c_3 \overrightarrow{v_3} e^{-\lambda_3 t}$$

עבור סעיף ב': צ"ל $c_1,\ c_2,\ c_3$ כך שמתקיים

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נקבל בפתרון ש

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 0$$

אזי ברור שיתקיים

$$c_1 = 2$$

ולכן הפתרון יהיה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. נחלק ב-$\sin y$ (נניח תחילה שהוא שונה מ-0):

$$(2y-3x)\,dx+xdy=0$$

נטפל במקרה $\sin y=0$:

$$\begin{aligned}\sin y &= 0\\ y &= k\pi\end{aligned}$$

לכן $y=k\pi$ הוא פתרון סינגולרי לכל $k\in\mathbb{Z}$.
את המשוואה נחלק ב-x ונפתור כמשוואה הומוגנית:

$$\begin{aligned}\left(2\frac{y}{x}-3\right)dx+dy &= 0\\ z &= \frac{y}{x}\\ (2z-3)+z\frac{dz}{dx} &= 0\\ \int -\frac{z}{2z-3}dz &= x+c\\ \frac{1}{2}z+\frac{3}{4}\ln(2z-3) &= x+c\\ \frac{y}{2x}+\frac{3}{4}\ln\left(\frac{2y}{x}-3\right) &= x+c\end{aligned}$$

סעיף ב':
תחילה מהפתרונות הסינגולריים, הפתרון $y=\pi$ מתאים.
נציב את תנאי ההתחלה במשוואה ונקבל:

$$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\ln(2\pi-3)=1+c$$

נמצא את c ונציב.

מבחן תש"ע מועד ב'

1. נוכיח.
נניח בשלילה $y_1^{'}(a)=0$ וידוע ש-$y_1(a)=0$.
הפתרון $y(x)=0$ פותר את המד"ר עם תנאי התחלה אלה ולכן לפי הקיום והיחידות $y_1\equiv 0$ בסתירה לנתון.
לכן $y_1^{'}(a)\neq 0$. נגדיר:

$$y=\frac{y_2^{'}(a)}{y_1^{'}(a)}y_1(x)$$

לכן

$$y^{'}(a)=\frac{y_2^{'}(a)}{y_1^{'}(a)}\cdot y_1^{'}(a)=y_2^{'}(a)$$

ולכן:

$$\begin{aligned}y(a) &= y_2(a)=0\\ y^{'}(a) &= y_2^{'}(a)\end{aligned}$$

ולפי משפט הקיום והיחידות:

$$y\equiv y_2$$

ולכן

$$y_2=c\cdot y_1$$

דרך נוספת לפתור: נסתכל על

$$W(a)=\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1^{'}(a) & y_2^{'}(a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1^{'}(a) & y_2^{'}(a)\end{vmatrix}=0$$

לכן הם ת"ל ולכן

$$y_2=cy_1$$

2. המשוואה היא

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= -k+rD(t) \\ \frac{dD}{rD-k} &= dt \end{aligned}$$

נפתור בעזרת הפרדת משתנים.
עבור סעיף ג', נשים לב שאם

$$rD(0)>k$$

אז החוב גדל. אם

$$rD(0)<k$$

אז החוב קטן.

3. המד"ר:

$$y^{''}-4y^{'}+4y=3e^{2x}+2\sin x$$

הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} \lambda^2-4\lambda+4 &= 0 \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

(שורש כפול). הפתרון ההומוגני:

$$y_h=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$$

נחפש פתרון מהצורה

$$y_p=At^2e^{2t}+B\sin x+C\cos x$$

נציב במשוואה ונמצא $A,\ B,\ C$:

$$\begin{aligned} y_p^{'} &= 2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x}+B\cos x-C\sin x \\ y_p^{''} &= 2Ae^{2x}+4Axe^{2x}+4Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}-B\sin x-C\cos x \\ &= 2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}-B\sin X-C\cos x \\ 2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}-B\sin X-C\cos x &- 8Axe^{2x}-8Ax^2e^{2x}-4B\cos x-4C\sin x \\ &+ 4Ax^2e^{2x}+4B\sin x+4C\cos x=3e^{2x}+2\sin x \\ 2Ae^{2x}+(3B-4C)\sin x+(3C-4B)\cos x &= 3e^{2x}+2\sin x \\ 2A &= 3\Rightarrow A=\frac{3}{2} \\ 3B-4C &= 2 \\ 3C-4B &= 0 \end{aligned}$$

נמצא B ו־C ונקבל את y_p.
הפתרון הכללי יהיה

$$y=y_h+y_p$$

4. נקבץ איברים:

$$\begin{aligned}\left(y^{''}\right)^2+5yy^{''}+4y^2 &= 0\\ \left(y^{''}+4y\right)\left(y^{''}+y\right) &= 0\end{aligned}$$

קיבלנו שתי משוואות לינארית:

$$\begin{aligned}y^{''}+y &= 0\Rightarrow y=C_1\sin x+C_2\cos x\\ y^{''}+4y &= 0\Rightarrow y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x\end{aligned}$$

5. (לא פתרנו בכיתה)
6. (לא פתרנו בכיתה)
7. המד"ר:

$$x^2y^{''}+7x^3y^{'}-y=0$$

משוואת אוילר המתאימה היא

$$x^2y^{''}-y=0$$

המשוואה האינדיציאלית היא:

$$\begin{aligned}r(r-1)-1 &= 0\\ r^2-r-1 &= 0\\ r &= \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

נציב

$$\begin{aligned}y &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}\\ y^{'} &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}\\ y^{''} &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}\end{aligned}$$

נציב במשוואה

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+7\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

נגדיר

$$\ell=n+2$$

ואז:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{\ell=2}^{\infty}7a_{\ell-2}(\ell+r-2)x^{\ell+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}=0$$

עבור $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}a_n(n+r)(n+r-1)+7a_{n-2}(n+r-2)-a_n &= 0\\ a_n\left[(n+r)(n+r-1)-1\right] &= -7(n+r-2)a_{n-2}\\ \frac{a_n}{a_{n-2}} &= -\frac{7(n+r-2)}{(n+r)(n+r-1)-1}\\ a_n &= a_0\cdot\prod_{m=2}^{n}\frac{(-7)(m+r-2)}{(m+r)(m+r-1)-1}\end{aligned}$$

תשס"ט מועד א׳

1. המד"ר:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -cA \\ V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ A &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} \\ &= 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \\ 4\pi r^2\frac{dr}{dt} &= -c\cdot 4\pi r^2 \\ \frac{dr}{dt} &= -c \\ r\left(t\right) &= -ct+k \end{aligned}$$

סעיף ב׳:

$$k=a$$

זמן ההתאדות:

$$\begin{aligned} r &= 0 \\ -ct+a &= 0 \\ t &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

זמן ההתאדות הוא $\frac{a}{c}$.

תשס"ט מועד ב׳

1. נסמן S כמהירות, אז

$$S=\sqrt{2gh}$$

$$V\left(t\right)=\pi r^2\cdot h$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\sqrt{2gh}\cdot 1 \\ \frac{dV}{dt} &= r^2\pi\cdot\frac{dh}{dt} \\ r^2\pi\frac{dh}{dt} &= -\sqrt{2gh} \\ \frac{dh}{-\sqrt{h}} &= \frac{\sqrt{2g}dt}{r^2\pi} \\ -2\sqrt{h} &= \frac{\sqrt{2g}}{r^2\pi}t+c \\ h &= \left(c-\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{2}\pi r^2}\right)^2 \end{aligned}$$

מהנתון בסעיף ב׳ נקבל

$$c=\sqrt{H}$$

נשווה את h ל-0:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sqrt{H} - \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \frac{t}{\pi r^2}\right)^2 \\ \sqrt{H} &= \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \frac{t}{\pi r^2} \\ t &= \pi r^2 \sqrt{\frac{2H}{g}} \end{aligned}$$

2. (לא פתרנו בכיתה)
3. (לא פתרנו בכיתה)
4. (לא פתרנו בכיתה)
5. (לא פתרנו בכיתה)
6. (לא פתרנו בכיתה)
7. המד"ר:

$$y'' + ry' + ky = \cos \omega t$$

נפתור את הפולינום האופייני

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4k}}{2}$$

הפתרון ההומוגני הוא

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

אם $r^2 = 4k$ אז הפתרון הוא

$$y_h = c_1 e^{-\frac{r}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{r}{2}t}$$

ננחש פתרון מהצורה

$$y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

נציב במשוואה ונקבל את A ו-B.
סעיף ב': עבור $r = 0$ נקבל

$$y'' + ky = \cos \omega t$$

נפתור פולינום אופייני:

$$\lambda = \pm\sqrt{-k} = \pm i\sqrt{k}$$

אז

$$y_h = c_1 \cos \sqrt{k} t + c_2 \sin \sqrt{k}$$

אם $\omega \neq \pm\sqrt{k}$ אז ננחש:

$$y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

אם $\omega = \pm\sqrt{k}$ אז ננחש פתרון מהצורה

$$y_p = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t$$