שאלה 1 (פתרון)

$$\int \cos^2 3x\,dx = \int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 6x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 6x}{6}\right] + c$$

שאלה 2 (פתרון)

$$\int \left(\cos^4\left(\frac{x}{4}\right)\right)dx = \int\left(1-\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2 dx =$$

$$= \int\left(1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left[1+2\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + \int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x\right]dx\right] =$$

$$= \frac{x}{4} + \sin\frac{x}{2} + \frac{1}{8}(x+\sin x) + c =$$

$$= \frac{3}{8}x + \sin\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{8} + c$$

שאלה 3 (פתרון)

$$\int \cos^5\theta\,d\theta = \int \cos^5\theta\cdot\sin^0\theta\,d\theta =$$

כן חזקה של cos זה לא זוגי ולכן חזקה של sin

זוגית, לכן נשתמש בהצבה:

$$u = \sin\theta \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$$

$$du = \cos\theta\,d\theta \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-u^2}$$

$$= \int\left(\sqrt{1-u^2}\right)^4 du = \int\left(1-u^2\right)^2 du = \int\left(1-2u^2+u^4\right)du =$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

פתרון לשאלה 4

$$\int \sin^2 2t \cos^3 2t \, dt =$$

(*) כיון שמכפלת חזקת של sin זוגית וחזקת של
cos אי זוגית לכן נבצע את הצבה:

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad \cos x = \sqrt{1-u^2}$$
$$du = \cos x \, dx$$

(**) אך לפני שניגש לפתרון, נבצע הצבה:

$$x = 2t \Rightarrow dx = 2dt \Rightarrow dt = \tfrac{1}{2} dx$$

ונקבל:

$$= \frac{1}{2}\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx \underset{\Downarrow}{=} \frac{1}{2}\int u^2 \left(\sqrt{1-u^2}\right)^2 du =$$

הצבה (*)

$$= \frac{1}{2}\int u^2(1-u^2)\,du = \frac{1}{2}\int [u^2 - u^4]\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right] + c = \frac{\sin^3 2t}{6} - \frac{\sin^5 2t}{10} + c$$

פתרון לשאלה 5

$$\int \sin^2 x \cos^4 x = \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos^2 x \, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \,(1+\cos 2x) = \frac{1}{4}\Big[\int \sin^2 2x \, dx +$$

$$+ \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx\Big] = \frac{1}{4}\Big[\int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x \, dx +$$

$$+ \underset{\substack{t = \sin 2x \\ dt = 2\cos 2x\,dx}}{\int} \frac{t^2}{2}\, dt \Big] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{t^3}{6}\right] + c =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin^3 2x}{6}\right] + c =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin^3 2x}{24} + c$$

$\cancel{\int 2\sin\frac{x}{2}}$

$$\int \sin x \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= 2\int \cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\,dx = -4\int t^2\,dt =$$

$$t = \cos\frac{x}{2}$$
$$dt = -2\sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$= -4\left[\frac{t^3}{3}\right] + c = -\frac{4\cos^3\frac{x}{2}}{3} + c$$

השתמשנו בזהות: $\cos^3\frac{x}{2} = \frac{3}{4}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos\frac{3x}{2}$

ונקבל תשובה סופית:

$$-\cos\frac{x}{2} - \frac{\cos\frac{3x}{2}}{3} + c$$

פתרון תרגיל 8

$$\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 1} =$$

כיון יש לנו פולי' רציונלי ב $\sin x$, $\cos x$

נבחר לפי הצבה מספר 3', השתמשנו

בהצבה: $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ונציב את ה- ביטויים ונקבל

$$= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{\frac{1-t^2+2t+1+t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2t+2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + c =$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2} + 1\right| + c$$

פתרון לשאלה 9

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

יש כמה דרכים לפתור את האינטגרל הזה:

דרך 1: (נרשום $\int \sin^{-1}x \cos^{0}x\,dx$) וזהו לגבי
אינטגרל מתאים כי כאשר החזקה של cos זוגית
ואילו של sin אי זוגית ולכן נעשה הצבה:

$u=\cos x$

דרך 2: (נרשום:)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x} \stackrel{\text{II}}{=}$$

$$\boxed{\text{הצבה: } t=\cos x,\quad dt=-\sin x\,dx}$$

$$= -\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

זה פתרון אינטגרל של פונ' רציונלית.

דרך 3: (נשים לב שזו פונ' רציונלית ב sin
ולכן אפשר להשתמש בהצבה אוניברסלית - טריגו':

$$t=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow x=2\arctan t \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \ln|t| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

פתרון לשאלה 11

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} =$$

נשתמש בהצבה אוניברסלית טריגו' ונקבל:

$$= \int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{1+t^2-2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(t-1)^2} = 2\left(-\frac{1}{t-1}\right)+c = \frac{2}{1-t}+c =$$

$$= \frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}}+c$$

<u>פתרון תרגיל 12</u>

$$\int \cos 3x \cos 2x \, dx$$

משתמשים ב-א:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\cos 5x + \cos x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 5x}{5} + \cos x\right]+c$$

<u>הצבות טריגונומטריות</u>

<u>פתרון תרגיל 1</u>

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx =$$

נשתמש בהצבה:

$$x = 2\sin t$$

$$dx = 2\cos t\,dt$$

$$= \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 2\int\left[1+\cos 2t\right]dt = 2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]+c \quad (*)$$

$$\boxed{t = \arcsin\frac{x}{2}}$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cdot\cos t = 2\frac{x}{2}\cdot\cos t = 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} =$$

$$\cos^2 t = 1-\sin^2 t = 1-\frac{x^2}{4} = \frac{4-x^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$= x\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

ולכן: $\sin 2t = x\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

נציב את זה ב-(*) ונקבל:

$$\arcsin\frac{x}{2} + x\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+c$$

[illegible] 2

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} =$$

$x = 3\sin t$ [illegible]

$dx = 3\cos t\,dt$

$$= \int \frac{9\cdot\sin^2 t\cdot 3\cdot\cos t\,dt}{\underbrace{\sqrt{9-9\sin^2 t}}_{=3\cos t}} = \int 9\sin^2 t\,dt =$$

$$= 9\int\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right]dt = \left[\frac{9}{2}t-\frac{9}{4}\underset{(**)}{\sin 2t}\right]+c =$$

$t = \arcsin\frac{x}{3}$

$\sin t = \frac{x}{3}$ ([illegible])

$\cos^2 t = 1-\sin^2 t = 1-\frac{x^2}{9} = \frac{9-x^2}{9}$

$\Downarrow$

$\cos t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$

$\Rightarrow$ $\sin 2t =$

$= 2\sin t\cos t =$

$= \frac{2}{3}x\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$

[illegible] (**) [illegible]

$$= \frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}x\,\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} = \frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}$$

[illegible] 3

$$\int\frac{dx}{(4+x^2)^2} =$$

$x = 2\tan\theta$ [illegible]

$dx = \frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$= \int\frac{\left(\frac{2}{\cos^2\theta}\right)d\theta}{(4-4\tan^2\theta)^2} = \int\frac{\left(\frac{2}{\cos^2\theta}\right)d\theta}{16(1-\tan^2\theta)^2} = \int\frac{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta}{8\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\int\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c \quad (**)$$

$$\cancel{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta = 1+\frac{x^2}{4} = \frac{4+x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{4+x^2} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}}$$

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{4}{4+x^2} = \frac{x^2}{4+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{4x}{4+x^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{x}{2}$$

אעשה: סופית שמצאנו אחרי שלוש

$\sin 2\theta$, θ ל $(**)$:

$$\frac{1}{16}\left[\arctan\frac{x}{2} + \frac{2x}{4+x^2}\right] + c = \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + \frac{x}{8(4+x^2)} + c$$

<u>פתרון תרגיל-4</u>

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx =$$

$$x = \frac{3}{\cos t} \qquad \text{נשתמש ב-sec:}$$

$$dx = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{3\tan t}{\cos t}\,dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{9}{\cos t} - 9}}{\frac{3}{\cos t}} \cdot \frac{3\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{3\tan t}{\left(\frac{3}{\cos t}\right)} \cdot \frac{3\tan t}{\cos t}\,dt =$$

$$= 3\int \tan^2 t\,dt = 3\int\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt =$$

$$= 3\left[\tan t - t\right] + C$$

$$\cos t = \frac{3}{x} \Rightarrow \boxed{t = \arccos\left(\frac{3}{x}\right)}$$

$$\frac{x^2}{9} = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t \Rightarrow \tan^2 t = \frac{x^2-9}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan t = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}}$$

התשובה היא:

$$3\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - \arccos\left(\frac{3}{x}\right)\right] + C$$

<u>תרגיל מספר 5</u>

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

<u>פתרון:</u> כמו מקודם נשתמש בהצבה:

$$x = \frac{1}{\cos t} \qquad dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\tan t} \cdot \tan t \cdot \frac{1}{\cos t}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos t}dt = \int \frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t\,dt}{1-\sin^2 t} =$$

$$\underset{\substack{u=\sin t \\ du=\cos t\,dt}}{=} \int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{du}{(1-u)(1+u)} \underset{\text{פירוק לשברים חל"ק}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\ln|1-u| + \ln|1+u|\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1+\sin t}\right| + C$$

$$\cos t = \frac{1}{x} \Rightarrow \sin t = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

נציב את $\sin t = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ בביטוי $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|$

ונקבל:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}\right| \underset{\text{מכנה משותף}}{=} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right| =$$

נכפול ונחלק ב: $x+\sqrt{x^2-1}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(x^2-1)}\right| = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + c$$

פתרון שאלה 6

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int \frac{\cos t\,dt}{(\cos^2 t)^{3/2}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + c \quad (*)$$

$x = \sin t$
$dx = \cos t\,dt$

$$\cos t = \sqrt{1-x^2}$$

$$1+\tan^2 t = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\boxed{\tan t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \Rightarrow \text{נציב ב-} (*)$$

ונקבל:

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$$