מופשטת 3 תשע"ה - פתרון תרגיל 2

1. הוכח שהפולינום $p(x)=x^3+9x+12\in\mathbb{Q}[x]$ הוא אי־פריק. נניח θ הוא שורש של $p(x)$. חשב את ההופכי של $1+\theta$ ב $\mathbb{Q}[\theta]$.

הפולינום אי פריק לפי איזנשטין (עבור $p=3$) והלמה של גאוס. נחפש הופכי של $x+1$ בחוג המנה בעזרת אלגוריתם אוקלידס המוכלל. ע"י חילוק ארוך רואים: $p(x)-(1+x)(x^2-x+10)=2$ כלומר $\frac{1}{2}p(x)-\frac{1}{2}(1+x)(x^2-x+10)=1$ ולכן ההופכי הוא $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-5$. מה שאומר ש $(1+\theta)^{-1}=-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{2}\theta+5$.

2. ראינו ש x^3+x+1 אי פריק ב $\mathbb{Z}_2[x]$. נניח θ הוא שורש של הפולינום. חשבו חזקות של θ ב $\mathbb{Z}_2[\theta]$.

הבסיס של $\mathbb{Z}_2[\theta]$ כמ"ו מעל $\mathbb{Z}_2$ הוא $\{1,\theta,\theta^2\}$. נבטא את החזקות כצירופים של הבסיס הזה.

$$\theta^3=-\theta-1=\theta+1$$
$$\theta^4=\theta(\theta+1)=\theta^2+\theta$$
$$\theta^5=\theta(\theta^2+\theta)=\theta^3+\theta^2=1+\theta+\theta^2$$
$$\theta^6=\theta+\theta^2+\theta^3=1+2\theta+\theta^2=1+\theta^2$$
$$\theta^7=1$$

3. הוכיחו כי אם α הוא שורש רציונלי של פולינום מוני/מתוקן מ $\mathbb{Z}[x]$ אז α הוא שלם.

זה בעצם תוצאה של הלמה של גאוס. אבל יש גם הוכחה מפורשת קלה: נניח $\alpha=\dfrac{a}{b}$ (כך ש $b\nmid a$) הוא שורש של $x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$. זה אומר ש $\dfrac{a^n}{b^n}+\cdots+c_1\dfrac{a}{b}+c_0=0$. נכפול ב b^n ונקבל $a^n+\underbrace{c_{n-1}a^{n-1}b+\cdots+c_1ab^{n-1}+c_0b^n}_{b|}=0$

bמחלק את רכיב המסומן והוא לא מחלק את a ולכן בהכרח הוא שווה ל1.
ובאופן יותר כללי ניתן להראות (וזה שימושי מאוד): אם מס' רציונלי הוא שורש של פולינום מעל השלמים, המכנה מחלק את המקדם העליון (c_n) והמונה מחלק את המקדם החופשי (c_0).

4. יהי $K=\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt[3]{7}]$ (זה שדה).

   (א) חשבו את $[K:\mathbb{Q}]$.

   נשתמש בשדות ביניים $K_1=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]$, $K_2=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7},\sqrt{3}]$. אזי $[K:\mathbb{Q}]=[K:K_2]\,[K_2:K_1]\,[K_1:\mathbb{Q}]$.

נחשב: $[K_1 : \mathbb{Q}]$: הפולינום x^3-7 מתאפס בשורש והוא אי־פריק לפי איזנשטין (עם 7) ולכן הוא הפולינום המינימלי. אם כן $[K_1 : \mathbb{Q}]=3$.
נחשב $[K_2 : K_1]$: הפולינום x^2-3 מתאפס בשורש, ולכן הפולינום המינימלי הוא מדרגה לכל היותר 2. הדרגה היא לא 1 כי $\sqrt{3}\notin K_1$ (למה?) ולכן $[K_2 : K_1]=2$.
נחשב $[K : K_1]$: הפולינום x^2-2 מתאפס בשורש, ולכן הפולינום המינימלי הוא מדרגה לכל היותר 2. הדרגה היא לא 1 כי $\sqrt{2}\notin K_2$ (למה?) ולכן $[K : K_1]=2$.
סך הכל: $[K : \mathbb{Q}]=3\cdot 2\cdot 2=12$.

(ב) מצאו בסיס לK כמ"ו מעל $\mathbb{Q}$.

נשתמש בשדות הביניים מהסעיף הקודם. אנחנו מכירים בסיס של כל הרחבה קטנה בנפרד: $\left\{1,\sqrt[3]{7},\left(\sqrt[3]{7}\right)^2\right\},\{1,\sqrt{3}\},\{1,\sqrt{2}\}$. כדי לקבל את הבסיס לות של אברי הבסיס: $\left\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{7},\ \left(\sqrt[3]{7}\right)^2,\ \sqrt{2}\sqrt{3},\ \sqrt{2}\sqrt[3]{7},\ \sqrt{3}\sqrt[3]{7},\ \sqrt{2}\left(\sqrt[3]{7}\right)^2,\ \sqrt{3}\left(\sqrt[3]{7}\right)^2,\ \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{7},\ldots\right\}$.

(ג) כתבו את $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2+\sqrt[3]{7}}$ כצרוף לינארי של אברי הבסיס הנ"ל.

נחפש הופכי ל $2+\sqrt[3]{7}$ ב K_1 (זה יהיה גם ההופכי ב $K_1\subset K$). לפי אוקלידס: $(x^3-7)-(x^2-2x+4)(2+x)=-15$ ולכן ההופכי הוא $\dfrac{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2-2\sqrt[3]{7}+4}{15}$. נציב זאת בשבר הנתון ונקבל: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2+\sqrt[3]{7}}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})\dfrac{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2-2\sqrt[3]{7}+4}{15}=\frac{1}{15}\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{7}\right)^2-\frac{2}{15}\sqrt{2}\sqrt[3]{7}+\frac{4}{15}\sqrt{2}+\frac{1}{15}\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{7}\right)^2-\frac{2}{15}\sqrt{3}\sqrt[3]{7}+\frac{4}{15}\sqrt{3}$.

(ד) מצאו את הפולינום המינימלי של $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ והסיקו ש $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$.

ראינו בתירגול ש x^4-10x^2+1 הוא הפולינום המינימלי (ותודה לבת־חן שהעירה לי על הטעות חישוב). אם כן $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ הם שניהם ממימד 2 מעל $\mathbb{Q}$ולכן יש שיוון.

(ה) מהו הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{7}$ מעל $\mathbb{Q}$? ומהו מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$? (ודעו שאתם מבינים למה זה קורה).

בשני המקרים הפולינום הוא x^3-7. אפשר לראות ש $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt[3]{7}] : \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]\right]=3$ לפי הבסיסים, או לפי המימדים של $[K : \mathbb{Q}]$ ומימדים קלים לחישוב של שדות ביניים ממימדים 2.

5. חשב את המימד של $K=\mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$ מעל $\mathbb{Q}$.

נשתמש בשדה ביניים $K_1=\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$: $[K : \mathbb{Q}]=[K:K_1]\,[K_1:\mathbb{Q}]$.
x^2-3 הוא פולינום מינימלי של $\sqrt{3}$ (הוא מתאפס בות והוא אי־פריק לפי איזנשטיין לפי 3) ולכן $[K_1:\mathbb{Q}]=2$.
$x^2-2-\sqrt{3}$ מתאפס ב $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, ולכן המימד הוא לכל היותר 2. המימד הוא לא

1 כי $\sqrt{2+\sqrt{3}} \notin K_1$ (למה?) ולכן המימד הוא בדיוק 2.
סכ"ה המימד הוא 4.