בס״ד

פתרון המבחן

1 א. הפרכה.

הפ׳ לא בהכרח מונוטונית. למשל עבור $\beta=\omega$.

$2<3$ אבל $2^\omega=3^\omega=\omega$.

הפ׳ גם לא בהכרח רציפה.

$$f(\omega)=\omega^\omega>\omega=\sup_{n<\omega}\{\omega\}=\sup_{n<\omega}\{n^\omega\}=\sup\{f(n)\}$$

ב. $\omega\cdot(\omega+3)=\omega\cdot\omega+\omega\cdot3=\omega\cdot\omega+\omega\cdot2+\omega$

ברור ש- $cf(\omega\cdot(\omega+3))\ge\omega$ כי זה סודר גבולי.

נראה ש: $cf(\omega(\omega+3))\le\omega$.

לצורך כך נגדיר פ׳ קופינלית $f:\omega\to(\omega\cdot\omega+\omega\cdot2)+\omega$

ע״י $f(n)=\omega\cdot\omega+\omega\cdot2+n$

היא קופינלית כי לכל $\beta<\omega\cdot(\omega+3)$, או ש- $\beta\le\omega(\omega+2)$

או ש $\omega\cdot(\omega+2)<\beta<\omega(\omega+3) \Rightarrow 0<\gamma<\omega \Rightarrow \beta=n$.

אם $\beta\le\omega(\omega+2)$, אז $f(0)=\omega(\omega+2)\ge\beta$

אחרת, $\beta=f(n)$, ובפרט $f(n)\ge\beta$. מש״ל

ג. א. נסמן $otp(A,<)=\alpha$, $otp(B,<)=\beta$.

יש פ׳ שומרות סדר ועל:

$f: A\to\alpha$

$g: B\to\beta$

נב״ש: $\beta>\alpha$.

נסמן $i:B\to A$ את פ׳ ההכלה. כמובן שהיא שומרת סדר.

$f\circ i\circ g^{-1}:\beta\to\alpha$

בס"ד

היא פו' שומרת סדר.

ונתון ש- $\alpha<\beta$, כלומר $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha\in\beta$.

אז $f\circ i\circ g^{-1}:\beta\to\alpha$ היא בעצם פו' מ β ל- β.

הוכחנו בכיתה שכל פו' שומרת סדר מסודר לעצמו היא עולה.

אבל, $\alpha\in\beta$ ו- $f\circ i\circ g^{-1}(\alpha)\in\alpha$, סתירה.

ב. ראשית, נבנה קבוצה מטיפוס סדר $\omega+1$.

$$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\cup\{1\}.$$

עכשיו, נראה שבין כל שני מספרים ב- $\mathbb{Q}$ אפשר לבנות עותק של $\mathbb{Z}$.

<u>הוכחה:</u> יהיו $a<b\in\mathbb{Q}$

מהצפיפות של $\mathbb{Q}$ אפשר למצוא $a<c<b$.

(אפשר לקחת $c=\frac{a+b}{2}$).

נשלח $f(0)=c$

נבנה את הקבוצה ברקורסיה.

נניח שבנינו את $f(n)$ ו- $f(n-1)<f(n)<b$, אז:

$$f(n+1)=\frac{b+f(n)}{2}$$

בדומה, נניח שבנינו את $f(-n)$ ו- $a<f(-n)<f(-n+1)$

אז $f(-(n+1))=\frac{a+f(-n)}{2}$

לסיכום, לכל n נבנה עותק של $\mathbb{Z}$ בקבוצה הנ"ל בין $1-\frac{1}{n}$ ל- $1-\frac{1}{n+1}$, וכן נבנה עותק בין 1 ל- 2.

הקבוצה שתתקבל היא איזומורפית סדר ל- $\mathbb{Z}\times(\omega+1)$.

בס״ד

3. א. α סודר טבעי אם לכל $\beta\leq\alpha$, $\beta=0 \vee \beta$ עוקב.

ב. ω קבוצה של סודרים, לכן מספיק להראות שהיא טרנזיטיבית.

יהי $\beta\in\alpha\in\omega$. אז $\beta\leq\alpha$. נראה שגם β טבעי ולכן שייך לω.

יהי $\gamma\leq\beta \Rightarrow \gamma<\alpha$, ולכן $\gamma=0 \vee \gamma$ עוקב.

לכן β טבעי.

ג. ראשית, נראה ש ω גבולי.

יהי $\alpha\in\omega$, צריך להראות שגם $\alpha+1\in\omega$.

כלומר, צריך להראות ש $\alpha+1$ טבעי.

יהי $\beta\leq\alpha+1$. אם $\beta=\alpha+1$, אז מהגדרה הוא עוקב.

אחרת, $\beta<\alpha+1 \Rightarrow \beta\leq\alpha \Rightarrow \beta=0 \vee \beta$ עוקב.

כעת, נראה שאם $0\neq\alpha<\omega$, α עוקב.

$\alpha<\omega \Rightarrow \alpha\in\omega \Rightarrow \alpha$ טבעי. כמו כן, $\alpha\neq 0$, לכן בהכרח α עוקב.