

פתרון תרגיל בית 21 – לוגיקה 2014

תרגיל 1

באמצעות מציאת הפשרים המתאימים:

א. הראו שהפסוק הבא אינו טאוטולוגיה: $\exists x((Ax \rightarrow Bx) \wedge Cx)$

$$D = \{a\}$$

$$I(A) = \{a\}$$

$$I(B) = \{a\}$$

$$I(C) = \emptyset$$

בפשר זה הפסוק שקרי.

ב. הראו שהפסוק הבא אינו סתירה: $\forall x(Ax \rightarrow \exists y(By \wedge Cxy))$

$$D = \{a\}$$

$$I(A) = \emptyset$$

$$I(B) = \{a\}$$

$$I(C) = \{\langle a, a \rangle\}$$

בפשר זה הפסוק אמיתי.

ג. הראו שהפסוק הבא הוא קונטינגנטי: $\exists x(Axb \wedge Bb)$

פשר שבו הפסוק אמיתי:

$$D = \{b\}$$

$$I(A) = \{\langle b, b \rangle\}$$

$$I(B) = \{b\}$$

פשר שבו הפסוק שקרי:

$$D = \{b\}$$

$$I(A) = \{\langle b, b \rangle\}$$

$$I(B) = \emptyset$$

ד. הראו שהפסוק הבא הוא קונטינגנטי: $\forall x(Ax \rightarrow \exists y(By \wedge Ay))$

פשר שבו הפסוק אמיתי:

$$D = \{a\}$$

$$I(A) = \emptyset$$

$$I(B) = \{a\}$$

פשר שבו הפסוק שקרי:

$$D = \{a\}$$

$$I(A) = \{a\}$$

$$I(B) = \emptyset$$

תרגיל 2

הוכיחו (באמצעות מציאת הפשרים המתאימים) כי קבוצות הפסוקים הבאות הן קונסיסטנטיות (עקביות):

$$\{Pa, \exists x \neg Px\} \quad \text{א.}$$

פשר שבו שני הפסוקים אמיתיים:

$$D = \{a, b\}$$

$$I(P) = \{a\}$$

$$\{\exists x \neg Px, \exists x \neg Qx, \forall x (Px \vee Qx)\} \quad \text{ב.}$$

פשר שבו שלושת הפסוקים אמיתיים:

$$D = \{a, b\}$$

$$I(Q) = \{a\}$$

$$I(P) = \{b\}$$

תרגיל 3

בכל סעיף הראו (באמצעות מציאת הפשרים המתאימים) ששני הפסוקים אינם שקולים לוגית:

$$\exists x (Px \wedge Qx), \exists x Px \wedge \exists x Qx \quad \text{א.}$$

נמצא פשר שבו אחד הפסוקים אמיתי בעוד השני שקרי:

$$D = \{a, b\}$$

$$I(Q) = \{a\}$$

$$I(P) = \{b\}$$

מחד, הפסוק $\exists x Px \wedge \exists x Qx$ אמיתי שכן יש איבר שנמצא ב- P ויש איבר שנמצא ב- Q . מאידך, הפסוק $\exists x (Px \wedge Qx)$ שקרי שכן אין איבר שנמצא גם ב- P וגם ב- Q .

ב. $\forall x(Px \rightarrow Qx)$, $\exists xPx \rightarrow \exists xQx$

נתבונן בפשר:

$$D = \{a, b\}$$

$$I(Q) = \{a\}$$

$$I(P) = \{a, b\}$$

אזי הפסוק הראשון אמיתי בפשר (למשל כי הסיפא אמיתית) ואילו הפסוק השני שקרי בפשר (כי לא כל האיברים שנמצאים ב- P נמצאים ב- Q).

תרגיל 4

מילון:

$x-Gx$ גאון	$x-Sx$ הוא סטודנט
$x-Pxy$ עובר את y	$x-Ex$ הוא מבחן
$x-Fxy$ חבר של y	$-m$ מרי
$x-Mxy$ מכיר את y	$-a$ עדי
	$-l$ ראסל

השתמשו במילון הנ"ל על מנת להצרין את הפסוקים הבאים:

הערה כללית: בפסוק "כולם חוץ מעדי אוהבים תפוחים" הכוונה היא שכל מי שאיננו עדי אוהב תפוחים, **וגם** עדי לא אוהבת תפוחים. עם זאת בפסוק "כל מי שאיננו מרי אוהב תפוחים" לא לגמרי ברור מה הכוונה. כלומר, אנחנו יודעים שכל מי שאיננו מרי כן אוהב תפוחים, ועם זאת אנחנו לא יודעים מה קורה עם מרי. ניתן להתווכח עם זה ולהגיד שבשפה הטבעית זה דווקא כן ברור, ולכן אני אקבל את שתי התשובות.

א. רק עדי היא חברה של מרי

$$Fam \wedge \forall x(-x = a \rightarrow -Fxm)$$

ב. רק מרי מכירה את עדי

$$Mma \wedge \forall x(-x = m \rightarrow -Mxa)$$

ג. רק מרי מכירה את כולם

$$\forall xMmx \wedge \forall x(-x = m \rightarrow \exists y-Mxy)$$

ד. כל מי שגאון ואיננו מרי מכיר את ראסל

$$\forall x((Gx \wedge -x = m) \rightarrow Mxl)$$

ה. כל הסטודנטים חוץ מעדי עוברים את כל המבחנים

$$\forall x((Sx \wedge -x = a) \rightarrow \forall y(Ey \rightarrow Pxy)) \wedge \exists x(Ex \wedge -Pax)$$

ו. רק עדי לא עוברת שום מבחן

$$\forall x(\neg x = a \rightarrow \exists y(Ey \wedge Pxy)) \wedge \forall x(Ex \rightarrow \neg Pax)$$

תרגיל 5

מילון:

$x - Sxy$	שייך ל- y
$x - Mx$	מחברת
$-m$	מרי
$-a$	עדי

הצרינו את הפסוקים הבאים תוך שימוש במילון הנ"ל:

א. למרי יש בדיוק מחברת אחת

$$\exists x((Mx \wedge Sxm) \wedge \forall y((My \wedge Sym) \rightarrow y = x))$$

ב. לעדי יש לכל היותר מחברת אחת

$$\forall x \forall y(((Mx \wedge Sxa) \wedge (My \wedge Sya)) \rightarrow x = y)$$

ג. למרי יש בדיוק שתי מחברות

$$\exists x \exists y((Mx \wedge Sxm) \wedge (My \wedge Sym) \wedge \neg x = y \wedge \forall z((Mz \wedge Szm) \rightarrow (z = x \vee z = y)))$$

ד. לעדי יש לפחות שלוש מחברות

$$\exists x \exists y \exists z((Mx \wedge Sxa) \wedge (My \wedge Sya) \wedge (Mz \wedge Sza) \wedge (\neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg y = z))$$