תירגול למורים בש תשפב סמסטר ב

8 ביוני 2022

חדוא

מבחן לדוגמה 2:

1. חשבו

(א) $\int \sin^2(x)\cos^3(x)\mathrm{dx}$

פתרון:

$$\int \sin^2(x)\cos^3(x)\mathrm{dx} = \int \sin^2(x)\cos^2(x)\cdot\cos(x)\mathrm{dx} = \int \sin^2(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\cdot\cos(x)\mathrm{dx}$$

$$= \left[\begin{array}{c} t=\sin(x) \\ \mathrm{dt}=\cos(x)\mathrm{dx} \end{array}\right] = \int t^2\left(1-t^2\right)\mathrm{dt} = \frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C = \frac{\sin^3(x)}{3}-\frac{\sin^5(x)}{5}+C$$

(ב) $\int \frac{x^4+1}{x^3-1}\mathrm{dx}$

פתרון: נשתמש **בשברים חלקיים**: נתחיל בחילוק פולינומים, כיוון שהמונה גדול שווה בדרגתו מהמכנה:

$$\begin{array}{c|l} x & \\ \hline x^4+1 & x^3-1 \\ x^4-x & \\ ------ & \\ 1+x & \end{array}$$

קיבלנו ש

$$x^4+1 = x\cdot\left(x^3-1\right)+(x+1)$$

ולכן

$$\frac{x^4+1}{x^3-1} = x+\frac{x+1}{x^3-1}$$

ולכן

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-1}\mathrm{dx} = \int x\mathrm{dx}+\int \frac{x+1}{x^3-1}\mathrm{dx} = \frac{x^2}{2}+\int \frac{x+1}{x^3-1}\mathrm{dx}$$

נמשיך עם $\int \frac{x+1}{x^3-1}\mathrm{dx}$: נפרק את המכנה לגורמים אי פריקים. רואים ש 1 הוא שורש של x^3-1 ולכן הוא מתחלק ב $x-1$, כלומר ש $x^3-1=(x-1)\,p(x)$. נחלק בשביל לגלות את $p(x)$ (את הגורמים הנוספים של x^3-1):

$$\begin{array}{c|c}
x^2+x+1 & \\
\hline
x^3-1 & x-1 \\
x^3-x^2 & \\
------- & \\
x^2-1 & \\
x^2-x & \\
----- & \\
x-1 & \\
x-1 &
\end{array}$$

לכן $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$. נשים לב ש x^2+x+1 לא פריק ולכן אפשר כעת לעבור לפירוק לשברים חלקיים. קיימים קבועים A,B,C כך ש

$$\frac{x+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

נמצא אותם. נעשה מכנה משותף ונשווה מונים ונקבל

$$x+1=A\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)\,(x-1)$$

נציב $x=1$ לקבל $2=A\cdot 3$ ולכן

$$A=\frac{2}{3}$$

. נציב $x=0$ לקבל $1=A-C$ ולכן

$$C=A-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

נציב $x=-1$ לקבל $0=A-2\,(C-B)$ לכן $0=A-2C+2B$ לכן

$$B=C-\frac{A}{2}=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3\cdot 2}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

וקיבלנו

$$\int\frac{x+1}{x^3-1}\mathrm{dx}=\int\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\mathrm{dx}=\int\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}\mathrm{dx}-\frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{dx}=$$
$$=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|+C$$

לכן התשובה הסופית היא

$$\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln\left(x^2+x+1\right)+C$$

.2

(א) נמצא אסימפ' אנכיות שזה גבול בנקודות שהפונקציה לא מוגדרת או לא רציפה. במקרה של $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ זה רק ב $x=0$ אז נבדוק את הגבול שמה:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\left\{\frac{0}{0}\text{לופיטל}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=1$$

ולכן אין אסיפ' אנכית.
נמצא את אסימפ' אופקיות. זה לחשב את הגבולות ב $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty},\text{לופיטל}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-1}=\left\{\frac{-\infty}{0-1}\right\}=\infty$$

לכן יש אסיפ' אופקית מצד ימין (לכיוון ∞) שהיא $y=0$.

(ב) האם $\int_0^\infty\frac{x}{e^x-1}\mathrm{dx}$ מתכנס או מתבדר?

פתרון: מה הנקודה הבעייתית? רק ∞ (קטע אינסופי). הנקודה 0 לא בעייתית כי לפונקציה שלנו יש שמה נקודת אי רציפות סליקה. נשים לב $\frac{x}{e^x-1}\geq 0$ בקרן $[0,\infty)$ ונוכל להשתמש במבחני השוואה עם פונקציה מהצורה $\frac{1}{x^n}$ שגם היא חיובית שמה. נשווה עם $\frac{1}{x^2}$ (למה? כי האינטואציה אומרת שהאינגרל שלנו מתכנס בגלל שבמכנה יש e^x שחזק יותר מכל חזקה של x).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{e^x-1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty},\text{לופיטל}\hat{}3\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0$$

זה אומר שהמכנה $\frac{1}{x^2}$ חזקה/גדולה יותר (באופן גבולי) מהמונה $\frac{x}{e^x-1}$ ולכן, מכיוון שיודעים ש $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}$ מתכנס גם שלנו מתכנס. מה היה קורה אם היינו מחשבים

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{e^x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\frac{x}{e^x-1}}{\frac{1}{x^2}}}=\left\{\frac{1}{0^+}\right\}=\infty$$

היינו מסיקים שהמונה, $\frac{1}{x^2}$ חזקה/גדולה יותר (באופן גבולי) מהמכנה $\frac{x}{e^x-1}$.

.3

(א) חשבו

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}e^{\left(t^2\right)}\mathrm{dt}}{1-\cos(x)}$$

פתרון: רואים שהמכנה שואף ל 0. גם המונה שואף ל 0 כיוון שזה אינטגרל של הפונקציה הרציפה $e^{\left(t^2\right)}$ על הקטע $[0,x^2]$ שאורכו שואף ל 0. לכן לפנינו מקרה קלאסי שאפשר להשתמש בלופיטל. לגזור את המכנה זה קל, זה יוצא $\sin(x)$. מה עם המונה? היינו שמחים למצאו קדומה ל $e^{\left(t^2\right)}$ ולחשב את המונה מפורשות אבל זה עסק לא נעים (נראה לי שאפילו לא אפשרי). אבל מה כן? אנחנו יודעים שיש לה קדומה שנסמנה ב $F(t)$ (נימוק: לכל פונקציה רציפה יש קדומה). כלומר $F'(t)=e^{\left(t^2\right)}$. לכן המונה, לפי המשפט היסודי של החדוא, הוא

$$\int_0^{x^2}e^{\left(t^2\right)}\mathrm{dt}=F\left(x^2\right)-F\left(0\right)$$

והגזירה שלו היא

$$F'\left(x^2\right)\cdot 2x-0=\left\{F'(t)=e^{\left(t^2\right)}\right\}=e^{\left[\left(x^2\right)^2\right]}\cdot 2x=e^{\left(x^4\right)}\cdot 2x$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}e^{\left(t^2\right)}\mathrm{dt}}{1-\cos(x)}=\left\{\frac{0}{0},\text{לופיטל}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{\left(x^4\right)}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}\cdot 2e^{\left(x^4\right)}=1\cdot 2\cdot e^0=2$$

(ב) חשבו את הגבול של

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

פתרון: הסעיף הזה בדר"כ (אם לא תמיד) מדבר על סכומי רימן ומתבסס על המשפט: תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ אזי

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)\mathrm{dx}$$

לכן נרצה למצוא פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ כך ש $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$. נשחק עם a_n ונקווה להגיע לצורה זו:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2+k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} \underbrace{=}_{f(x)=\frac{1}{1+x^2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ומכיוון ש $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ רציפה $[0,1]$ נקבל לפי המשפט ממקודם ש

$$a_n \to \int_0^1 f(x)\mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{dx} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

.4

(א) קרבו את $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4}\mathrm{dx}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{10{,}000}$.

פתרון: נתחיל בחישוב טור טיילור (סביב 0) של $\frac{1}{1+x^4}$:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1-(-x^4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^4\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}$$

כאשר השיוויון האדום הוא שימוש בטור ההנדסי

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

שהוא נכון עבור $|t| < 1$ ואצלנו עושים אינטגרל בקטע $[0, \frac{1}{2}]$ ולכן ה xים אכן קטנים (בערך מוחלט) מ 1 ולכן גם x^4. לכן

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4}\mathrm{dx} = \int_0^{0.5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}\right)\mathrm{dx} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{0.5} (-1)^n x^{4n}\mathrm{dx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\Big|_0^{0.5}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(4n+1)\, 2^{4n+1}}$$

כלומר,

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}$$

ולכן

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(4n+1)\,2^{4n+1}}=\frac{1}{1\cdot 2^1}-\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{9\cdot 2^9}-\frac{1}{13\cdot 2^{13}}+\cdots$$

נרצה לבחור k מתאים ולקחת בתור קירוב את

$$\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{1}{(4n+1)\,2^{4n+1}}$$

ולחסום את השגיאה שהיא

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(4n+1)\,2^{4n+1}}$$

ע"י $\frac{1}{10{,}000}$ כמבוקש בשאלה. נשים לב שהשגיאה שלנו היא טור לייבניץ (סימנים מתחלפים והסדרה

$$\frac{1}{(4n+1)\,2^{4n+1}}$$

מונוטונית יורדת לאפס). לכן נחפש את המחובר הראשון (בערך מוחלט) שקטן מ $\frac{1}{10{,}000}$ כי הוא יחסום את השגיאה שלנו ואז נוכל לחשב את הקירוב. אצלנו: המחובר

$$\frac{1}{13\cdot 2^{13}}=\frac{1}{106,496}\le\frac{1}{10,000}$$

ולכן הקירוב הבא עונה על דרישות השאלה:

$$\frac{1}{1\cdot 2^1}-\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{9\cdot 2^9}=\frac{11,381}{23,040}$$

לסיכום:

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{dx}=\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2^1}-\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{9\cdot 2^9}}_{\frac{11,381}{23,040}}\underbrace{-\frac{1}{13\cdot 2^{13}}+\cdots}_{\le\frac{1}{10,000}}$$

או

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{dx}\approx\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2^1}-\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{9\cdot 2^9}}_{\frac{11,381}{23,040}}$$

עם שגיאה

$$\underbrace{-\frac{1}{13\cdot 2^{13}}+\cdots}_{\le\frac{1}{10,000}}$$

(ב) חשבו את $f^{(48)}(0)$ של $f(x)=x^2e^{2x}$.

פתרון: נפתח טור טיילור של $f(x)$ סביב 0 ואז ידוע, מיחידות טור טיילור, שהמקדם של x^{48} הוא $\frac{f^{(48)}(0)}{48!}$. נתחיל עם טור טיילור של e^x שידוע שהוא

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

לכן

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

לכן

$$f(x) = x^2 e^{2x} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{n+2}$$

רואים שהמקדם של x^{48} הוא $\frac{2^{46}}{46!}$ (עבור הצבה $n = 46$) ולכן נקבל את השיוויון

$$\frac{2^{46}}{46!} = \frac{f^{(48)}(0)}{48!}$$

ומכאן לתשובה הסופית שהיא

$$f^{(48)}(0) = \frac{2^{46} \cdot 48!}{46!} = 2^{46} \cdot 47 \cdot 48$$

5. תהא f גזירה ואי שלילית ב $[0, \infty)$.

(א) נגדיר פונקציה $g(x) = x \cdot \int_0^x f(t)\mathrm{dt}$. הוכיחו כי $g(x)$ היא מונוטונית עולה ב $[0, \infty)$.
פתרון: נראה כי $g' \geq 0$ ב $[0, \infty)$ ולפי חדוא 1 היא מונוטית עולה שמה.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \cdot \int_0^x f(t)\mathrm{dt} + x \left(\int_0^x f(t)\mathrm{dt} \right)' \\ &= \int_0^x f(t)\mathrm{dt} + x \cdot f(x) \end{aligned}$$

(נימוק לשיויון האדום: נסמן קדומה של $f(t)$ ב $F(t)$ ואז

$$\int_0^x f(t)\mathrm{dt} = F(x) - F(0)$$

ולכן

$$\left(\int_0^x f(t)\mathrm{dt} \right)' = [F(x) - F(0)]' = F'(x) = f(x)$$

כמו שרצינו). נתון ש $f(x)$ אי שלילית ב $[0, \infty)$ ולכן $\int_0^x f(t)\mathrm{dt} \geq 0$ וגם $f(x) \geq 0$ ולכן

$$g'(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{dt} + x \cdot f(x) \geq 0$$

כפי שרצינו.

(ב) נניח בנוסף כי $f(x)$ מונוטונית עולה. הוכיחו כי $g(x)$ קמורה/מחייכת.
פתרון: נראה $g''(x) \geq 0$. נגזור שוב את

$$g'(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{dt} + x \cdot f(x)$$

$$g''(x) = f(x) + 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x) = 2f(x) + xf'(x)$$

כיוון ש $f(x)$ מונוטונית עולה, נקבל ש $f'(x) \geq 0$ ולכן

$$g''(x) = 2f(x) + xf'(x) \geq 0$$

כפי שרצינו.