תרגול 7

אם עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ קיים n_0 טבעי כך שלכל $n > n_0$ $a_n < 0$. אז ניתן להשתמש במבחני השוואה עבור טורים חיובים ובמשפטים שראינו תרגול קודם.
השיעור נבחן טורים עם אינסוף איברים חיובים ואינסוף איברים שלילים.

מטרת השיעור: לבחון התכנסות והתבדרות של טורים לא חיובים ולא שליליים. ז"א טורים עם אינסוף איברים חיובים ואינסוף איברים שליליים.

<u>משפט</u>

אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אזי גם הטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

<u>דוגמא</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right|$ מתכנס.

<u>הערה</u>

הטענה ההפוכה לא נכונה. אנחנו נראה בהמשך השיעור שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ מתכנס, אבל ראינו בתרגול הקודם שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right|$ מתבדר.

<u>התכנסות בהחלט</u>

<u>הגדרה</u>

נאמר שטור כללי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

<u>תרגיל</u>

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n^2}$

<u>פתרון</u>

נבחן תחילה את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin 2n}{n^2} \right|$ קיבלנו טור חיובי ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון. לכל n טבעי מתקיים $\left| \frac{\sin 2n}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}$. ראינו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן על פי מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin 2n}{n^2} \right|$ מתכנס ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

<u>תרגיל</u>

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{5n^3 - n^2 + 1}$.

פתרון

נסמן $a_n=\frac{(-1)^n n^3}{5n^3-n^2+1}$ מכיוון ש $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ נקבל שהתנאי הכרחי להתכנסות טורים לא מתקיים והטור מתבדר.

הערה

אם נרצה לבדוק את התכנסותו או התבדרותו של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{5\pi}{n}$ ניתקל בבעיה מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \sin\frac{5\pi}{n}\right|$ מתבדר. (ניתן להראות ע"י מבחן ההשוואה השני עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$)

ו $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \sin\frac{5\pi}{n}=0$.

מטרה: להראות דרכים לקביעת התכנסות והתבדרות טורים כלליים.

הגדרה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ($a_n>0$ לכל n טבעי) נקרא טור מתחלף.

משפט לייבניץ

הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ מתכנס אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

ב. $a_n>a_{n+1}$ לכל n טבעי.

דוגמא

נתבונן בטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. $a_n=\frac{1}{n}$. נשים לב ששני התנאים ממשפט לייבניץ מתקיימים מכיוון ש $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ובנוסף $a_n>a_{n+1}$ לכל n טבעי.

הערה

אם תנאי א לא מתקיים אז הטור מתבדר.
אם תנאי א מתקיים אבל תנאי ב לא מתקיים אז לא ניתן לדעת ממשפט לייבניץ אם הטור מתכנס או לא.

תרגיל

האם הטור $\frac{1}{65}-\frac{2}{70}+\frac{3}{75}-\frac{4}{80}+\frac{5}{85}-.....$ מתכנס או מתבדר? נמק את תשובתך.

פתרון

נשים לב שהטור מתחלף וניתן לרשום אותו באופן הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5n+60}$ ולכן $a_n=\frac{n}{60+5n}$ קיבלנו ש

$\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{5}\neq 0$ ולכן לא ניתן להשתמש במשפט לייבניץ. בכל אופן $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5n+60}\neq 0$ ולכן על פי התנאי ההכרחי להתכנסות טורים לא מתקיים והטור מתבדר.

<u>התכנסות בתנאי</u>

<u>הגדרה</u>

נאמר שהטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

אם הטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר נאמר שהטור מתכנס בתנאי.

<u>תרגיל</u>

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{5\pi}{n}$ האם הטור מתכנס (בתנאי או בהחלט) או מתבדר.

<u>פתרון</u>

הטור הנבחן מתחיל להיות טור מתחלף מ $n>5$ כאשר $a_n=\sin\frac{5\pi}{n}$. נבדוק התכנסות בהחלט. על פי מבחן ההשוואה השני $\left(b_n=\frac{1}{n}\right)$. $L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{5\pi}{n}}{1/n}=5\pi$ ולכן הטור מתבדר.

הטור הנבחן מתחיל להיות טור מתחלף מ $n>5$ כאשר $a_n=\sin\frac{5\pi}{n}$. מכיוון ש $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ והסדרה מונוטונית יורדת עבור $n>10$ נקבל ממבחן לייבניץ שהטור מתכנס ולכן הטור מתכנס בתנאי.

<u>תרגיל</u>

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{25n+3}{n(2n+1)}$ האם הטור מתכנס (בתנאי או בהחלט) או מתבדר.

<u>פתרון</u>

נבדוק תחילה האם הטור מתכנס בהחלט ז"א נבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25n+3}{n(2n+1)}$ מתכנס. נשתמש במבחן ההשוואה השני כאשר ניקח את הטור ההרמוני.

נשים לב ש $L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{25n+3}{n(2n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{25n+3}{2n+1}=12.5$ מכיוון ש $0<L<\infty$ והטור ההרמוני מתבדר נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{25n+3}{n(2n+1)}\right|$ מתבדר ולכן הטור לא מתכנס בהחלט. הטור הוא טור מתחלף.

נבדוק האם התנאים של משפט לייבניץ מתקיימים.

1. $0<\lim_{n\to\infty}\frac{25n+3}{n(2n+1)}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{25n}{n(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{25}{(2n+1)}=0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

2. נבחן את הפונקציה

$$f(x)=\frac{25x+3}{x(2x+1)}=\frac{25x+3}{2x^2+x}$$

$$f'(x)=\frac{25(2x^2+x)-(4x+1)(25x+3)}{(2x^2+x)^2}=\frac{50x^2+25x-100x^2-37x-3}{(2x^2+x)^2}=\frac{-50x^2-37x-3}{(2x^2+x)^2}$$

הנגזרת שלילית לכל מספר חיובי ולכן הפונקציה יורדת לכל x חיובי, ז"א $a_n>a_{n+1}$ לכל n טבעי.

תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס בתנאי.

מבחן דריכלה

יהי $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ טור חסום ו $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית שואפת לאפס. אזי $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ מתכנס.

תרגיל

הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}$ מתכנס.

פתרון

הסדרה $a_n=\frac{1}{n}$ מונוטונית שואפת לאפס ולכן נשאר להראות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n)$ חסום.

נראה שסדרת הסכומים החלקיים $S_n=\sin(1)+\sin(2)+...+\sin(n)$ חסומה.

נכפול פי $2\sin(1)$ בשני האגפים ונקבל

$$2\sin(1)S_n=2\sin(1)\sin(1)+2\sin(1)\sin(2)+...+2\sin(1)\sin(n)$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$.

ואז

$$2\sin(1)\sin(1)+2\sin(1)\sin(2)+...+2\sin(1)\sin(n)==$$
$$(\cos 0-\cos 2)+(\cos 1-\cos 3)+(\cos 2-\cos 4)+(\cos 3-\cos 5)+...+(\cos(n-1)-\cos(n+1))=$$
$$=\cos 0+\cos 1-\cos n-\cos(n+1)$$

ז"א

$S_n=\frac{\cos 0+\cos 1-\cos n-\cos(n+1)}{2\sin 1}\Rightarrow|S_n|\le\frac{4}{2\sin 1}$ וקיבלנו את הדרוש.