הרצאה IV- אינפי 1

הוכחנו בשיעור קודם כי $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ ועוד כמה משפטים. כולם היו בהנחה שהגבולות הם מספרים סופיים, ממשיים.

<u>פעולות עם גבולות אינסופיים</u>:

משפט:

1) אם $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \pm\infty$. ($a$ ממשי)

2) אם $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = sign(a)(\pm\infty)$ ונגדיר $sign(a) = \begin{Bmatrix} 1\,; a>0 \\ 0\,; a=0 \\ -1\,; a<0 \end{Bmatrix}$. גם כאן a ממשי (סופי).

3) אם $\lim_{n\to\infty}|x_n| = \infty$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0$.

4) אם $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0$ וגם $x_n > 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

5) אם $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0$ וגם $x_n < 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$

<u>סימונים</u>:

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \; and \; x_n > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0+$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \; and \; x_n < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0-$

הוכחה:

1. $\forall E \in R\, \exists \overline{n_1}: \forall n \ge \overline{n_1}\; x_n \in (a-1, a+1)$ וגם $\exists \overline{n_2}: \forall n \ge \overline{n_2}\; y_n > E-(a-1)$ ונגדיר $\forall n \ge \bar{n} := \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ ולכן נקבל $x_n + y_n < (a-1) + E - (1-1) = E$ וע״פ הגדרה $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \pm\infty$ מש.ל.
2. $\exists \overline{n_1}: \forall n \ge \overline{n_1}\; x_n \in \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = U_\varepsilon(a);\; \varepsilon = \frac{a}{2}$. וע״פ הגדרה $\forall n \ge \overline{n_1}\; x_n > \frac{a}{2}$. כעת $\exists \overline{n_2}: \forall n \ge \overline{n_2}\; y_n > \frac{2}{a}E$ ונקבל כי $x_n y_n > \frac{2}{a}\frac{a}{2}E = E$. ולפי הגדרה מקבלים ש $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$ והדרך להוכחה אם a שלילי דומה מאוד. (פשוט סימן האי שיוויון ישתנה) מש.ל.
3. נקבע כי אפסילון חיובי. $\lim_{n\to\infty}|x_n| = \infty$ זה גורר $\exists \bar{n} \forall n \ge \bar{n}\; |x_n| > E := \frac{1}{\varepsilon}$ אבל $\frac{1}{|x_n|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < |x_n|$ וקיבלנו את הדרוש. כי $\forall \varepsilon > 0\; \exists \bar{n}\; \forall n \ge \bar{n}\; \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ ולפי הגדרה $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0$. מש.ל.
4. $\exists \bar{n} \forall n \ge \bar{n}\; 0 < |x_n| < \frac{1}{E} =: \varepsilon$ כאשר $x_n > 0$ וקיבלנו כי $\forall n \ge \bar{n} : E < \frac{1}{x_n}$ ולפי הגדרה $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. מש.ל.
5. כעת נבחר E שלילי, ומתקיים $\exists \bar{n} \forall n \ge \bar{n}\; |x_n| < \varepsilon := \frac{1}{|E|}$ ונקבל כי $x_n \in \left(-\frac{1}{|E|}, \frac{1}{|E|}\right) = \left(\frac{1}{E}, -\frac{1}{E}\right)$ כי E שלילי. קיבלו כי E גדול מ1, $\forall E \in R\, \exists \bar{n}\; \forall n \ge \bar{n}\; \frac{1}{x_n} > E \rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. והגרירה האחרונה ע״פ הגדרה. מש.ל.

<u>מקרים של אי הגדרה</u>:

א) $\infty+(-\infty)=\infty-\infty$ לא מוגדר.

ב) 0∞ לא מוגדר.

ג) וגם $0/0$ לא מוגדר.

דוגמא עבור א: נסתכל על אי ההגדרה הראשון. $x_n = n + constant, y_n = -n$ והגבול של סכומם יהיה הקבוע $(constant)$ עצמו.

דוגמה נוספת: $x_n = n + (-1)^n, y_n = -n$ ואין גבול לסכומם.

דוגמא עבור ב: $x_n = \frac{c}{n} \rightarrow 0, y_n = n \rightarrow \infty$ וגבול המכפלה הוא לקבוע c.

דוגמא עבור ג: $x_n = \frac{c}{n} \rightarrow 0, y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ וגבול החילוק הוא לקבוע c.

תרגיל: $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ מהו?

פתרון: $0=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ למרות שהמצב בתרגיל עצמו הוא אי הגדרתי.

תרגיל: $x_n=(1+\frac{\alpha}{n})^2-1, y_n=(1+\frac{\beta}{n})^2+1$ ושתיהם שואפות לאפס. מה גבול החילוק בינהם? זהו סוג 0/0.

פתרון: $\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\alpha+\frac{\alpha^2}{n}}{2\beta+\frac{\beta^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}}{\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{\alpha}{n})^2-1}{(1+\frac{\beta}{n})^2+1}$.

<u>גבולות ואי שיוונים:</u>

<u>למה על סנדוויץ' (Sandwitch) – או ברוסיה שיכור ושני שוטרים ☺</u>

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty},\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ונניח ש$n\geq\bar{n}$ נניח ש $\lim_{n\to\infty}a_n=l_1$ וגם ש$\lim_{n\to\infty}b_n=l_2$. כעת נניח כי הגבולות שוות $l_1=l_2:=l$ אז קיים $\lim_{n\to\infty}x_n$ והוא שווה ל$\lim_{n\to\infty}x_n=l$.

הוכחה: נניח שl מספר ממשי. יהי $\varepsilon>0$ וע"פ הנתון$\exists\bar{n}_1\ \forall n\geq\bar{n}_1\ a_n\in(l_1-\varepsilon,l_1+\varepsilon)$ $\exists\bar{n}_2\ \forall n\geq\bar{n}_2\ b_n\in(l_2-\varepsilon,l_2+\varepsilon)$ נגדיר $\bar{n}:=\max(\bar{n}_1,\bar{n}_2)$. סה"כ נקבל כי $\forall n\geq\bar{n}\ l-\varepsilon<a_n\leq x_n\leq b_n<l+\varepsilon$ מכאן נובע $x_n\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$ לכן הגבול הוא $\lim_{n\to\infty}x_n=l$.

נוכיח עבור המקרה השני, בו הגבול אינסופי, ז"א $l=\pm\infty$. כעת נוכיח עבור $+\infty$.

יהי $E\in R\ \to\exists\bar{n}\ \forall n\geq\bar{n}: a_n>E$ ואז$\forall n\geq\bar{n}\ E<a_n\leq x_n$. סה"כ קיבלנו כי $\forall E\ \exists\bar{n}\forall n\geq\bar{n}: x_n>E$ וע"פ הגדרה הוכחנו כי הגבול הוא $+\infty$, ז"א $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

כעת נוכיח עבור $-\infty$. $x_n\leq b_n\ \&\ b_n\to-\infty\Longrightarrow x_n\longrightarrow-\infty$. משל.

משפט: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ וגם קיים $\lim_{n\to\infty}x_n=l\in\overline{\mathbb{R}}$.

1) אז לכל l>p ממשי קיים $\bar{n}$ כך שלכל $n\geq\bar{n}: x_n>p$.
2) לכל l<q ממשי קיים $\bar{n}$ כך שלכל $n\geq\bar{n}: x_n<q$.

הוכחה: ראשית נניח כי l ממשי. ונגדיר $\mathcal{E}:=1-p>0$. נקבל $U_{\mathcal{E}}(l)=(l-\mathcal{E},l+\mathcal{E})=(p,2l-p)$. נתון כי $\lim_{n\to\infty}x_n=l$ אזי $\exists\bar{n}\ \forall n\geq\bar{n}: x_n\in(p,2l-p)\leftrightarrow p<x_n<2l$.

עבור q>l: $\mathcal{E}:=q-1$ ואז $U_{\mathcal{E}}(l)=(l-\mathcal{E},l+\mathcal{E})=(2l-q,q)$ אזי $\exists\bar{n}\ \forall n\geq\bar{n}: x_n\in(2l-q,q)\leftrightarrow 2l-q<x_n<q$.

עבור *l=+∞*: $P\ p<l=+\infty$ כל משפר ממשי לפי ההגדרה של אינסוף.. $\exists\bar{n}\ \forall n\geq\bar{n}: x_n>p$

עבור *l=-∞*: אותו העיקרון כמו באינסוף החיובי.

מסקנה: יהיו $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, נניח כי הגבולות קיימים וגם כי $\lim_{n\to\infty}x_n=a, \lim_{n\to\infty}y_n=b$. אם *a<b* אזי מתקיים כי $\exists\bar{n}\ \forall n\geq\bar{n}: x_n<y_n$.

הוכחה: יהי *P* ממשי כך ש*a<P<b*. לפי המשפט הקודם מתקיים $\exists\bar{n}_1\forall n\geq\bar{n}_1: x_n<p, \exists\bar{n}_2\forall n\geq\bar{n}_2: y_n>p$. כעת נגדיר ונקבל כי $\forall n\geq\bar{n}:=\max(\bar{n}_1,\bar{n}_2): x_n<p<y_n$ ומכאן נובע כי $x_n<y_n$. משל.

משפט: יהיו $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, נניח שקיימים $\lim_{n\to\infty}x_n=a, \lim_{n\to\infty}y_n=b$, אם $\exists n_0: \forall n\geq n_0: x_n<y_n$ אזי מתקיים ש$\lim_{n\to\infty}x_n<\lim_{n\to\infty}y_n$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $\lim_{n\to\infty}x_n>\lim_{n\to\infty}y_n$, אבל לפי המשפט הקודם $\exists n_1\forall n\geq n_1: x_n>y_n$. ואם נשתמש בשתי הנתונים ונגדיר $n\geq\max(n_0,n_1)$. נקבל סתירה להנחה כי $x_n>y_n$ וגם $x_n<y_n$. לכן בהכרח שמתקיים$\lim_{n\to\infty}x_n<\lim_{n\to\infty}y_n$. משל.

מסקנה: הגבול יחיד! ז"א שאם קיים גבול לסדרה מסויימת, זהו הגבול היחיד. נניח $\lim_{n\to\infty}x_n=l_1$, וגם כי קיים גבול נוסף והוא$\lim_{n\to\infty}x_n=l_2$. אבל ידוע כי $x_n\geq x_n$ ולכן ע"פ המשפט $l_1\geq l_2$ וגם $l_1\leq l_2$. מכוא נובע בהכרח כי $l_1=l_2$.