משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 5

<u>תזכורת:</u> מספרים מרוכבים $\mathbb{C}$, $z=a+bi$

<u>טענה:</u> (הכללה) לכל $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ מתקיים:

(i) $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}$

(ii) $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k}=\prod_{k=1}^{n}\overline{z_k}$

(iii) $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right|=\prod_{k=1}^{n}|z_k|$

<u>משפט (השורש הצמוד):</u>

יהי $p(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ פולינום ממשי, ז"א לכל k $a_k\in\mathbb{R}$. אזי אם $z_0=\alpha+i\beta$ שורש של $p(x)$, כלומר $p(z_0)=0$, אזי גם $\overline{z_0}=\alpha-i\beta$ הינו שורש של $p(x)$.

<u>מסקנה:</u> בפולינומים ממשיים השורשים המרוכבים מגיעים בזוגות צמודים בלבד $\alpha\pm i\beta$.

<u>משפט אוילר:</u> Leonhard Euler (שוויץ)

$$\forall\theta\in\mathbb{R}:\quad e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

<u>הוכחה:</u> דרך אחת להוכיח הינה באמצעות פיתוחי טיילור. נראה דרך קצרה. נגדיר $f(\theta)=e^{-i\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)$

נגזור לפי θ:

$$f'(\theta)=-ie^{-i\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)+e^{-i\theta}(-\sin\theta+i\cos\theta)=0$$

קיבלנו $f'(\theta)\equiv0 \Rightarrow f(\theta)=Const$, אבל אפשר לחשב אותו מאחר! $f(0)=e^{0}(\cos0+i\sin0)=1 \Rightarrow C=1$

ז"א קיבלנו $f(\theta)\equiv1 \Rightarrow e^{-i\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)=1$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$

אם נבחר $\theta=\pi$ נקבל $e^{i\pi}=-1$

$$\boxed{e^{i\pi}+1=0}$$ וזו זהות אוילר

פשוטה מאוד, אולם נחשבת לאחת המשוואות היפות במתמטיקה המשלבת חיבור, כפל והעלאה בחזקה ביחד עם הקבועים

e, π, i, 1, 0

אי רציונליים — e ; מדומה — i ; איבר היחידה לכפל — 1 ; איבר האפס בפעולת חיבור. — 0

בנוסף נעיר כי הפונק' הטריגונומטריות הן מרוכבות בהסתר ולהפך.

$$\boxed{\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

<u>מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים קבועים</u>

מד"ר מהצורה:
$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}=\begin{cases}0 & \text{הומוג'}\\ b(x) & \text{א'-הומוג'}\end{cases}$$
(כאשר a_k קבועים ממשיים!)

נעבור <u>למקרה ההומוגני</u>:

$y''=y \Leftarrow y''-y=0$

ננחש פתרון מהצורה $y=e^{\lambda x}$ (לשיטתו של אוילר)

לכן $y'=\lambda e^{\lambda x}$ $\xrightarrow{\text{גזירה נוספת}}$ $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$ נציב ונקבל:

$$\lambda^2 e^{\lambda x}-e^{\lambda x}=0 \Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2-1)=0$$

ניתן לצמצם ב- $e^{\lambda x}$ $\Leftarrow$ $\lambda^2-1=0$ $\Leftarrow$ $\lambda=\pm1$

ולכן קיבלנו שני פתרונות בת"ל $y_1=e^{x}$, $y_2=e^{-x}$

והפתרון הכללי הינו צ.ל שלהם

$$\boxed{y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}}$$

אם כן במד"ר מסדר n כלל', $a_n y^{(n)}+\dots+a_0y=0$

"ננחש" $y=e^{\lambda x}$ $\Longleftarrow$

$y'=\lambda e^{\lambda x}$

$\vdots$

$y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$

2 פל| $a_n\lambda^n e^{\lambda x}+\dots+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_0 e^{\lambda x}=0$ נציב במד"ר ונקבל:

נחלק ב $e^{\lambda x}$ לקבל

$$\underbrace{a_n\lambda^n+\dots+a_1\lambda+a_0}_{\text{נקרא הפולינום האופייני או המאפיין}}=0$$

משוואה זו נקראת המשוואה האופיינית או המאפיינת (אינדיציאלית)

- המשך הפתרון הינו במציאת שורשי המשוואה הנ"ל בניחוש.

בעיה 1: (שורשים מרוכבים), דוגמא: $y''+y=0$

הפולינום האופייני/המשוואה המאפיינת $\lambda^2+1=0$

$$\Downarrow$$

$$\lambda=\pm i \Longrightarrow y_1=e^{ix} \qquad y_2=e^{-ix}$$

כפתרון לבעיה נקח 2 צירופים ליניאריים אחרים

$$Y_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x$$

$$Y_2=\frac{1}{2i}y_1-\frac{1}{2i}y_2=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x$$

הפתרון יהיה:

$$\boxed{y=c_1Y_1+c_2Y_2=c_1\cos x+c_2\sin x}$$

ובאופן כללי:

אם שורשי המשוואה המאפיינת הם $\alpha\pm i\beta$. אז:

$$Y_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2=\frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)x}+\frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)x}=$$

$$=e^{\alpha x}\left(\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}\right)=\boxed{e^{\alpha x}\cos\beta x}$$

$$Y_2=\frac{1}{2i}y_1-\frac{1}{2i}y_2=\frac{1}{2i}e^{(\alpha+i\beta)x}-\frac{1}{2i}e^{(\alpha-i\beta)x}=$$

$$=e^{\alpha x}\left(\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}\right)=\boxed{e^{\alpha x}\sin\beta x}$$

הפתרון:

$$\boxed{y=e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)}$$

מקרה 2: (שורש עם ריבוי)

דוגמא:

$$y''-6y'+9y=0$$

משוואה מאפיינת:

$$\lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow (\lambda-3)^2=0$$

ולכן $\boxed{\lambda=3}$ שורש אחד בריבוי 2.

לכן $y_1=e^{3x}$ פתרון. בהורדת סדר נציב

$$\begin{cases} y=e^{3x}\cdot z \Rightarrow y'=3e^{3x}\cdot z+e^{3x}\cdot z' \\ \Rightarrow y''=9e^{3x}\cdot z+6e^{3x}\cdot z'+e^{3x}\cdot z'' \end{cases}$$

נציב במד"ר לקבל:

$$\cancel{9e^{3x}\cdot z}+\cancel{6e^{3x}\cdot z'}+e^{3x}\cdot z''-\cancel{18e^{3x}\cdot z}-\cancel{6e^{3x}\cdot z'}+\cancel{9e^{3x}\cdot z}=0$$

$$\Rightarrow e^{3x}\cdot z''=0 \Rightarrow z''=0 \Rightarrow z'=C_1 \Rightarrow z=C_1x+C_2$$

ובסה"כ

$$\boxed{y=e^{3x}(C_1x+C_2)=C_1xe^{3x}+C_2e^{3x}}$$

ובאופן כללי, אם λ מופיע בריבוי m אזי הסדרה:

$$x^0e^{\lambda x}+x^1e^{\lambda x}+\dots+x^{m-1}e^{\lambda x}$$

תתן m פתרונות בת"ל. סימון אחר לסדרה $(x^ke^{\lambda x})_{k=0}^{m-1}$

הערה: אם מדובר בזוג שורשים מרוכבים מופיע $\alpha\pm i\beta$ בריבוי m

אזי הסדרה:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots$$

$$\dots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

נותנת $2m$ פתרונות בת"ל.

הסימון:

$$(x^ke^{\alpha x}\cos\beta x)_{k=0}^{m-1} \qquad (x^ke^{\alpha x}\sin\beta x)_{k=0}^{m-1}$$

דוגמא לבעיית קושי (מד"ר + תנאי התחלה)

$$\begin{cases} y''-4y'+5y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=3 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2-4\lambda+5=0$$

פתרון: משוואה מאפיינת

שימו לב: דיסקרימיננטה שלילית

$$\Delta=16-20=-4$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i$$

לכן הפתרון הכללי מהצורה: $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

בשימוש בת. התחלה:

$$y(0)=e^0(c_1+0)=1\Rightarrow c_1=1$$

$$y'(x)=2e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+e^{2x}(-c_1\sin x+c_2\cos x)$$

$$\Rightarrow y'(0)=2(c_1+0)+1\cdot(0+c_2)=2c_1+c_2=3$$

$$\Rightarrow c_2=1$$

פתרון פרטי:

$$\Rightarrow \boxed{y=e^{2x}(\cos x+\sin x)}$$

* שימו לב: בפתרון כללי מופיעים הקבועים החופשיים ובפתרון הפרטי אין קבועים חופשיים כלל.

המקרה הא-הומוגני

אופרטורים דיפרנציאליים לינאריים (עם מקדמים קבועים, וסדר כללי)

D - אופרטור הנגזרת. D^n אופרטור נגזרת מסדר n.

ולכן אם נסמן $L=\sum_{k=0}^{n}a_kD^k$ (סימון Oliver Heaviside) (a_k מקדמים קבועים)

נוכל להציג את המד"ר הלינארית מסדר n בצורה: $Ly=b$

כעת נראה דרך אחת לפתרון מד"ר א-הומוגנית עם מקדמים קבועים.

שיטת המשמיד / Annihilator method

בהינתן מד"ר $Ly=b$, נרצה למצוא אופ' A המשמיד את b.

כלומר $Ab=0$. (לא תמיד קיים כזה אופרטור)

מפעילים את האופרטור על שני האגפים במד"ר ומקבלים:

$$ALy=Ab=0$$

וזו משוואה הומוגנית.

הערה חשובה: הקבועים "החופשיים" המתקבלים מ-A לא באמת חופשיים ויש למצוא אותם!

דוגמא:

$$y'' + 3y' + 2y = x^2$$

פתרון:

$$(D^2 + 3D + 2)y = x^2$$

המשמיד של x^2 הוא $A = D^3$ ולכן

$$D^3(D^2+3D+2)y = D^3(x^2) = 0$$

$$D^3(D+1)(D+2)y = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

משוואה מאפיינת

כאן $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, ו $\lambda = 0$ בריבוי 3. לכן

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \underbrace{C_3 + C_4 x + C_5 x^2}_{y_p}$$

y_p שבו הקבועים יש למצוא בעזרת.

צ"א נסמן
$$\begin{cases} y_p = C_3 + C_4 x + C_5 x^2 \\ y_p' = C_4 + 2C_5 x \\ y_p'' = 2C_5 \end{cases}$$
אזי

נציב הכל במד"ר ונשווה מקדמים.

$$\underbrace{2C_5}_{y_p''} + \underbrace{3C_4 + 6C_5 x}_{3y_p'} + \underbrace{2C_3 + 2C_4 x + 2C_5 x^2}_{2y_p} = x^2$$

השוואת מקדמים:

$O(x^0)$: $2C_5 + 3C_4 + 2C_3 = 0$

$O(x^1)$: $6C_5 + 2C_4 = 0 \Rightarrow \boxed{C_4 = -\frac{3}{2}}$

$O(x^2)$: $2C_5 = 1 \Rightarrow \boxed{C_5 = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 2C_3 = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$

$$\boxed{C_3 = \frac{7}{4}}$$

ולכן

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{7}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2}$$

עמ' 4

תרגיל: מצא אופרטור A המשמיד/מאפס את הפונ' הבאות:

א. x^3e^{2x-1}

ב. $e^{-x}\sin 3x$

ג. $x^5(x^3+x)e^x$

ד. $1+x+x^2$

פתרון: א. e^{2x} מתאפס ע"י $D-2$. e^{-1} קבוע ולכן $D-2$ יאפס גם אותו. ובסה"כ את e^{2x-1}. הכפלה ב-x^3 מעידה על כך שנדרש ריבוי מסדר 4 לשורש $\lambda=2$ לכן

$$\boxed{A=(D-2)^4}$$

כאן $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$ ועבור $Ay=0$ היינו מקבלים

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3x^2e^{2x}+C_4x^3e^{2x}$$

ב. $e^{-x}\sin 3x$. נדרש שורשים לפולינום האופייני מהצורה $-1\pm 3i$. כעת נבנה את האופרטור בצורה הבאה:

$$A=(D-(-1+3i))\cdot(D-(-1-3i))=\boxed{D^2+2D+10}$$

עבור $Ay=0$ נקבל $(D^2+2D+10)y=0$

פולינום אופייני: $\lambda^2+2\lambda+10=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-40}}{2}=\frac{-2\pm 6i}{2}=-1\pm 3i$

$$\Rightarrow y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$$

ג. $x^8e^x+x^6e^x$. $x^8e^x \leftarrow$ ריבוי 9 של $\lambda=1$ ולכן $(D-1)^9$. $x^6e^x \leftarrow$ מעיד על ריבוי 7 של $\lambda=1$ ולכן מספיק לבחור $A=(D-1)^9$ לאפס את שניהם. (אין צורך להכפיל).

ד. $1+x+x^2$. 1 מתאפס ע"י D. x מתאפס ע"י D^2. x^2 מתאפס ע"י D^3 ולכן $A=D^3$ מאפס את הסכום כולו.

"young man, in mathematics you don't understand things. you just get used to them"; John Von Neumann