אינפי 2 - תרגיל מספר 4

1. הוכיחו או הפריכו בדוגמא נגדית :

א. אם ל $-f$ יש קדומה בקטע $[a,b]$ ויש קדומה בקטע $(b,c]$, אז יש לה קדומה בקטע $[a,c]$.

ב. אם F קדומה של f בקטע $[0,1]$ ו $-G$ קדומה שלה בקטע $(1,2]$ אז :

$H(\mathrm{x})=\begin{cases}F(x), x\in[0,1]\\ \mathrm{G}(x), x\in(1,2]\end{cases}$ קדומה של f בקטע $[0,2]$.

ג. לפונקציה : $f(\mathrm{x})=\begin{cases}e^{\frac{sinx}{x^2}}, & x>0\\ 0, & \mathrm{x}=0\end{cases}$ אין קדומה בתחום $x\geq 0$.

(תזכורת : אם f גזירה בקטע [a,b] ו $-\alpha$ *ערך בין* $f_+^{(1)}(a)$ *ל-* $f_-^{(1)}(b)$ *אז יש נקודה* $c\in[a,b]$ *כך ש* $f^{(1)}(c)=\alpha$) .

2. חשבו את : $\int \max(x,x^2)\,dx$.

3. מיצאו נוסחא רקורסיבית עבור: $I_m=\int x^{\alpha}ln^{\mathrm{m}}(x)dx\,, \quad \alpha\neq -1$

4. חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$ ב. $\int (\frac{1-x}{x})^2\mathrm{dx}$ ג. $\int \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}dx$

ד. $\int \sqrt{\frac{e^{\mathrm{x}}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1}}dx$ (נסו הצבה : $t^2=\frac{e^{\mathrm{x}}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1}$, $x=?$ - מספיק להגיע לאינטגרל פונקציה רציונלית – ללא פיתרון שלו !)

ה. $\int \sqrt{x}ln(1+\sqrt{x})dx$ ו. $\int \frac{dx}{\sqrt{2\mathrm{x}-3}}$ ז. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

5. הוכיחו את גירסת חילוף המשתנה ("אינטגרציה בהצבה") הבאה (אותה נתרגל במפגש הבא) :

נניח נתון אינטגרל שיש לחשב : $\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$. אז , אם נשתמש בהצבה : $x=\varphi(t)$, כך שהפונקציה φ הפיכה וגזירה , וכך שיודעים פונקציה קדומה $F(t)$ לפונקציה $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (כלומר – שקיים $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)$) **אז** האינטגרל שלנו ניתן לחישוב על ידי :

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x})\right)+\boldsymbol{C}$$