תרגיל 5 - אינפי 3

1. מצא מישור משיק לספירת היחידה ב $\mathbb{R}^3$ בכל נקודה.

פתרון: המשוואה המתארת את ספירת היחידה הינה $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$. תהי נקודה $(a,b,c)$ כלשהי על הספירה, אזי המישור המשיק הינו
$2a(x-a)+2b(x-b)+2c(x-c)=0$

2. תהי $u(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבלית כך ש $u(t,t^2)=1$, $\frac{\partial u}{\partial x}=x$. חשב את $\frac{\partial u}{\partial y}(t,t^2)$ ומצא את $u$.

פתרון:

$$\frac{d}{dt}u\left(t,t^2\right)=0\ ,\ \frac{d}{dt}u\left(t,t^2\right)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,t^2)\frac{\partial x}{\partial t}(t)+\frac{\partial u}{\partial y}(t,t^2)\frac{\partial y}{\partial t}(t)=t\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial y}(t,t^2)\cdot 2t$$

$$\Rightarrow 0=t+\frac{\partial u}{\partial y}(t,t^2)\cdot 2t\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial y}(t,t^2)=-\frac{1}{2}$$

$$u=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x^2+1$$

3. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבלית, ו $x_1,\dots,x_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ העתקות ליניאריות. נניח ש $f(x_1(t),\dots,x_n(t))=\cos(t)$. הוכח שהוקטור $(x_1(1),\dots,x_n(1))$ מאונך לכיוון העלייה החדה ביותר של $f$ בנקודה $(0,\dots,0)$.

פתרון:

העלייה החדה ביותר הינה בכיוון הגרדינאנט. העתקות ליניאריות חייבות להיות מהצורה $x_i=a_it$.

לפי כלל השרשרת $-\sin t=\left(\cos t\right)'=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}(t)=\sum a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(t)=<(a_1,\dots,a_n),\nabla f(t)>$

ולכן $<(x_1(1),\dots,x_n(1)),\nabla f(0)>=<(a_1,\dots,a_n),\nabla f(0)>=0=-\sin 0$ כפי שרצינו.

4. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. תהי $g(t)=f(t,2t)$, הוכח שהפונקציה אינה דיפ' ב $(0,0)$ באמצעות כלל השרשרת.

פתרון:

$$g(t)=f(t,2t)=\begin{cases}\dfrac{t^2(2t)+(2t)^2t}{t^2+(2t)^2}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}=\begin{cases}\frac{6}{5}t, & t\neq0\\ 0, & t=0\end{cases}=\frac{6}{5}t.$$

$$g'(0)=\frac{6}{5}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ ולכן ברור ש $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot\frac{\partial x}{\partial t}(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}(0)=0$

לכן כלל השרשרת אינו מתקיים, ולפיכך הפונקציה אינה דיפרנציאבילית.

5. תהי $g(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית. הוכח שהמישור המשיק לגרף של $g$ בנקודה $(x_0,y_0,z_0)$ הוא קירוב ליניארי לגרף במובן הבא. נסמן ב $z(x,y)$ את המישור המשיק לנקודה, אזי $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{g(x,y)-z(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$.

כלומר, $g(x,y)\approx z(x,y)$ קרוב ל $(x_0,y_0)$

הוכחה:

$z(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+g(x_0,y_0)$ לפי הגדרת המישור המשיק.

לכן $g(x,y)-z(x,y)=g(x,y)-g(x_0,y_0)-\nabla g(x-x_0,y-y_0)$ לפי הגדרת הדיפרנציאבליות

$g(x,y)-z(x,y)=o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$ וזה בדיוק מה שרצינו.

6. מצא קירוב בעזרת התרגיל הקודם ל:

a. $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$

פתרון: $z(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+g(x_0,y_0)$

$g(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$ , $(x_0,y_0)=(1,2)$ , $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$ , $\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$ . לכן

$$z(1.02,1.97)=\frac{1}{2}(1.02-1)+2(1.97-2)+3=2.95$$

במציאות (במחשבון) $\sqrt{1.02^3+1.97^3}=2.95069...$

b. $\sin 29° \tan 46°$

פתרון: $g(x,y)=\sin x\tan y$ . $(x_0,y_0)=(30°,45°)$ , $\frac{\partial g}{\partial x}=\cos x\tan y$ , $\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\sin x}{\sin^2 y}$

$$\sin 29°\tan 46°=\cos 30°\tan 45°\cdot(-1°)+\frac{\sin 30°}{\sin^2 45°}1°+0.5=(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1)\cdot 1°+0.5=0.5023382...$$

במציאות (במחשבון) $\sin 29°\tan 46°=0.502035058...$