מבחן דמה בקורס **"אלגברה לינארית 1"** סמסטר קיץ תשע"א.

בחר אחד מבין שניים: (20 נק')

1. נסח והוכח את משפט ההגדרה להעתקות לינאריות
2. הוכח כי $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A)$ עבור $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

בחר שלוש מתוך ארבע:

3. (30 נק') יהי V מ"ו ממימד סופי. תהי $T:V \to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2 = Id$

א. (15 נק') הוכיחו כי כל וקטור $v \in V$ ניתן להצגה כ $v = w_1 + w_2$ כאשר $Tw_1 = w_1$ ו $Tw_2 = -w_2$

ב. (15 נק') הוכיחו כי קיים בסיס ל V, $E = \{v_1, ..., v_n\}$ כך ש $Tv_i = v_i$ או $Tv_i = -v_i$ לכל איבר בבסיס.

4. (35 נק') הוכח/הפרך:

א. (5 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ כך ש $A = A^t$, אזי הדרגה של A זוגית.

ב. (15 נק') יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אזי $AA^t = 0$ גורר כי $A = 0$ **וגם** $BAA^t = 0$ גורר כי $BA = 0$

ג. (15 נק') יהי V מ"ו ממימד $2n+1$. יהיו V_1, V_2, U_1, U_2 תתי מרחבים כך ש $V = V_1 + V_2 = U_1 + U_2$. אזי

$$\dim\left[\left(V_1 \cap U_1\right) + \left(V_1 \cap U_2\right) + \left(V_2 \cap U_1\right) + \left(V_2 \cap U_2\right)\right] \neq 0$$

5. (25 נק') אין קשר בין הסעיפים:

א. (10 נק') תהי המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$ ווקטור הפתרון $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ מצא לכל ערך של a כמה פתרונות יש למערכת $Ax = b$ מעל $\mathbb{Z}_3$.

ב. (8 נק') תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ * & * & * \\ 0 & 2 & * \end{pmatrix}$ מצאו את כל האפשרויות ל A אם ידוע $|A| = 0, A = A^t$

ג. (7 נק') יהא המספר המרוכב $z \in \mathbb{C}$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+1)$. מצא את z^{4446}

6. נתונה $T(x,y,z,w) = (x+y, w, 0, z)$ העתקה לינארית.

א. (9 נק') מצא את $\left[T^n\right]$ לכל $n \in \mathbb{N}$

ב. (8 נק') מצא בסיס לגרעין ולתמונה של ההעתקה T

ג. (8 נק') מצא את המטריצה המייצגת $\left[T^3\right]_E$ כאשר

$$E = \{(1,1,0,0)(1,-1,1,1),(0,0,1,2),(0,0,-1,1)\}$$