פתרון תרגיל בית 4 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א׳ תשע״ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת״ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך י״א כסלו ה׳תשע״ז, 11.12.2016.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. כמה תת־חבורות יש ל-$\mathbb{Z}_{30}$? בכמה מהן יש איבר מסדר 2?

פתרון. מדובר בחבורה ציקלית סופית, ולכן קיימת לה תת־חבורה יחידה מכל סדר שמחלק את 30. כלומר יש לה שמונה תת־חבורות, מן הסדרים $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$.
יש איבר מסדר 2 בתת־החבורה אם ורק אם תת־החבורה מסדר זוגי.

שאלה 2. מצאו איבר מסדר 6 בחבורה S_5. רמז: מצאו איבר מסדר 2 ב-S_2 ואיבר מסדר 3 ב-S_3.

פתרון. האיברים מסדר 6 בחבורה S_5 הם בדיוק התמורות שניתן לרשום כמכפלה של מחזורים זרים מאורך 2 ומאורך 3. למשל התמורה $(345)(12)$.

שאלה 3. תנו דוגמה לחבורה אינסופית שנוצרת סופית. תנו דוגמה שהחבורה גם לא אבלית.
אם גם נדרוש שקיימת קבוצת יוצרים בגודל נתון ושהסדר של כל איבר חסום, זו הופכת להיות שאלה הרבה יותר קשה. למידע נוסף, קראו על בעיית ברנסייד בויקיפדיה.

פתרון. כל חבורה ציקלית היא נוצרת סופית, ולכן $\mathbb{Z}$ היא דוגמה אפשרית. מכפלה קרטזית של חבורות נוצרות סופית היא נוצרת סופית, ולכן דוגמה לחבורה לא אבלית ונוצרת סופית היא $\mathbb{Z}\times S_3$. חבורות יותר מעניינות שהן לא אבליות ונוצרות סופית הן למשל $SL_2(\mathbb{Z})$ שנוצרת על ידי שני איברים, והחבורה החופשית F_d על d יוצרים.

שאלות להגשה

שאלה 4. תהי G חבורה.

א. מצאו את התמורות $\sigma\in S_3$ כך שלכל חבורה G ולכל $x_1,x_2,x_3\in G$ מתקיים

$$o(x_1x_2x_3)=o(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)})$$

רמז: הזכרו בתרגיל הבית הקודם בו הוכחתם כי לכל $a,b\in G$ מתקיים $o(ab)=o(ba)$.

ב. עבור התמורות $\sigma \in S_3$ שלא נכללו בסעיף הקודם, תנו דוגמה נגדית באופן מפורש.
רמז: אפשר לבחור $G = S_3$.

פתרון. א. ברור שתמורת הזהות $\mathrm{id} \in S_3$ מקיימת את התנאי, שבמקרה זה אומר את הטענה הטריוויאלית

$$o(x_1x_2x_3) = o(x_1x_2x_3)$$

עבור התמורה (123) הדרישה היא

$$o(x_1x_2x_3) = o(x_2x_3x_1)$$

אם נסמן $y = x_2x_3$, אז הדרישה הופכת להיות $o(x_1y) = o(yx_1)$, וזה מתקיים לפי השאלה מתרגיל הבית הקודם. באופן דומה גם עבור התמורה (132), הדרישה

$$o(x_1x_2x_3) = o(x_3x_1x_2)$$

תתקיים (כאן נסמן $y' = x_1x_2$). עבור שאר התמורות הדרישה לא תתקיים, כפי שיופיע בסעיף הבא.

ב. התמורות הנותרות ב-S_3 הן (12), (13) ו-(23). הדוגמאות הנגדיות לכל אחת מן התמורות האלו דומות, ולכן נציג רק עבור $\sigma = (12)$.
בעקבות הרמז, נבחר $G = S_3$. ודאו שאתם מבינים למה חייבים לבחור כאן חבורה לא אבלית. נבחר

$$x_1 = (123)\,, \quad x_2 = (12)\,, \quad x_3 = (23)$$

ונקבל

$$x_1x_2x_3 = (123)\,(12)\,(23) = (132)$$
$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)} = x_2x_1x_3 = (12)\,(123)\,(23) = \mathrm{id}$$

קל לחשב כי

$$3 = o((132)) = o(x_1x_2x_3) \neq o(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}) = o(\mathrm{id}) = 1$$

שאלה 5. תהינה $H, K \leq G$ שתי תת־חבורות של G. הוכיחו או הפריכו:

א. $H \cup K$ היא גם תת־חבורה של G.

ב. HK היא גם תת־חבורה של G, כאשר $HK = \{hk \,|\, h \in H, k \in K\}$.

פתרון. א. כמעט כל דוגמה שנבחר תעבוד, כל עוד $K \nsubseteq H$ וגם $H \nsubseteq K$. למשל אם נבחר $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $H = \mathbb{Z}_3 \times \{0\}$ ו-$K = \{0\} \times \mathbb{Z}_3$, נקבל שהאיחוד אינו תת־חבורה. הוא לא תת־חבורה כי הוא לא סגור לפעולה, ובמקרה זה הסדר שלו לא מחלק את סדר החבורה.

ב. אם תת־החבורות לא נורמליות, אז בדרך כלל HK לא תהיה תת־חבורה. לכן חייבים לבחור חבורה לא אבלית. למשל נבחר $G = S_3$, $H = \langle(12)\rangle$ ו-$K = \langle(23)\rangle$. נקבל

$$HK = \{\mathrm{id}, (12)\,, (23)\,, (123)\}$$

וזו לא תת־חבורה מנימוקים דומים לסעיף הקודם.

שאלה 6. הוכיחו שהחבורה $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ היא ציקלית אם ורק אם $(n,m)=1$.

פתרון. חבורה מסדר N היא ציקלית אם ורק אם קיים בה איבר מסדר N. בתרגול ראינו שבחבורה $G \times H$, הסדר של איבר (g,h) הוא $[o(g),o(h)]$, עבור $g \in G$ ו-$h \in H$.

החבורה $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ היא מסדר nm. אם $(n,m)=1$, אז $[n,m]=nm$ לפי התרגיל שבו הוכחתם $|nm| = (n,m)\,[n,m]$. ידוע שהסדר של $1_n \in \mathbb{Z}_n$ הוא n והסדר של $1_m \in \mathbb{Z}_m$ הוא m, ולכן הסדר של $(1,1)$ הוא nm, ולכן $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ציקלית.

יהי איבר $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. הסדר של תת־החבורה הציקלית ש-(a,b) הוא לכל היותר $[n,m]$ כי $o(a)|n$ ו-$o(b)|m$. אבל אם $(n,m)>1$, אז $[n,m]<nm$, ולכן לא יהיה איבר שיוצר לבדו את $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. לכן אם $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ציקלית, אז $(n,m)=1$.

שאלה 7.

א. הוכיחו כי $(\mathbb{Q},+)$ אינה נוצרת סופית.

ב. יהי p ראשוני. מצאו חבורה אינסופית שהסדר של כל תת־חבורה ציקלית שלה שייך לקבוצה $\{1,p,p^2,p^3\}$. רמז: נסו להרחיב את המקרה הסופי של $\mathbb{Z}_p$.

פתרון. א. נניח בשלילה ש-$\mathbb{Q}$ נוצרת סופית. לכן ישנה קבוצת איברים סופית כך שמתקיים

$$H = \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right\rangle = \mathbb{Q}$$

ואפשר להניח כי $\frac{a_i}{b_i}$ הוא שבר מצומצם. כל איבר $q \in H$ אפשר להציג בצורה

$$q = k_1\frac{a_1}{b_1} + k_2\frac{a_2}{b_2} + \dots + k_n\frac{a_n}{b_n}$$

עבור $k_i \in \mathbb{Z}$, על פי מה שראינו בתרגול. בעזרת מכנה משותף אפשר להציג כל q כזה בצורה

$$q = \frac{k}{\operatorname{lcm}(b_1,b_2,\dots,b_n)}$$

עבור $k \in \mathbb{Z}$. אבל ישנם איברים ב-$\mathbb{Q}$ שהמכנה שלהם, כשבר מצומצם, גדול מ-$\operatorname{lcm}(b_1,b_2,\dots,b_n)$, כמו

$$\mathbb{Q} \ni \frac{1}{\operatorname{lcm}(b_1,b_2,\dots,b_n)+1} \notin H$$

כלומר $H \neq \mathbb{Q}$, שזו סתירה. לכן $\mathbb{Q}$ אינה נוצרת סופית.

ב. בחבורה

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \dots$$

הסדר של כל איבר, שאינו איבר היחידה, הוא p. באופן דומה דוגמה שבה "מממשים" את כל הסדרים ב-$\{1,p,p^2,p^3\}$ היא

$$H = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^3} = \mathbb{Z}_{p^3} \times \mathbb{Z}_{p^3} \times \dots$$

ודאו שאתם מבינים למה בכלל הסדר של כל איבר כאן הוא סופי.

אתגר: מצאו חבורה שאינה מכפלה קרטזית שעונה על דרישות השאלה. נסו למצוא חבורה לא אבלית כזו.

שאלה 8.

א. הוכיחו: $S_3 = \langle (12), (123) \rangle = \langle (12), (23) \rangle$. (למה אי אפשר למצוא קבוצת יוצרים קטנה יותר?)

ב. מצאו את כל איברי תת־החבורה $K_4 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle \leq S_4$. האם היא איזומורפית ל-$U_{10}$?

פתרון. א. לפי לגרנז', סדר תת־חבורה מחלק את סדר החבורה. לכן הסדרים האפשריים לתת־החבורות הלא טריוויאליות של S_3 הם $2, 3$. כמו כן, הוכחנו שסדר איבר בחבורה מחלק את סדר החבורה.
נראה שתת־החבורה $\langle (123), (12) \rangle$ שווה ל-S_3 כי הסדר של (123) הוא 3 והסדר של (12) הוא 2. כעת, מכיוון שסדר תת־החבורה $\langle (123), (12) \rangle$ מתחלק גם ב-2 וגם ב-3, אז הוא גם מתחלק ב-6. ראינו כי $|S_3| = 6$, ולכן $S_3 = \langle (123), (12) \rangle$ שכן הסדר של תת־חבורה הוא לכל היותר סדר החבורה.
לגבי $\langle (23), (12) \rangle$, נשים לב ש-$(132) = (13)(12)$. כלומר תת־חבורה זו מכילה איבר מסדר 3, ולפי נימוק דומה, נסיק שגם תת־חבורה זו מתלכדת עם החבורה S_3.

ב. תת־החבורה K נוצרת על ידי שני איברים מסדר 2, שמכפלתם גם מסדר 2. לכן האיברים הם
$$K = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$
החבורה הזו אינה ציקלית, ולכן איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. אבל $U_{10} \cong \mathbb{Z}_4$ היא ציקלית, ולכן לא איזומורפית ל-K.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי I קבוצה מכוונת (כלומר I היא קבוצה סדורה חלקית כך שלכל $i, j \in I$ קיים $k \in I$ כך ש-$k > i, j$). מערכת של חבורות $\{G_i\}_{i \in I}$ נקראת רשת עולה אם לכל $i < j$ מתקיים $G_i \subseteq G_j$.
הוכיחו שבמקרה זה $\bigcup_{i \in I} G_i$ היא חבורה. בפרט, אם ישנה שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$, אז גם איחוד השרשרת הוא חבורה.

שאלה 10. הוכיחו שלחבורה U_{40} אין קבוצת יוצרים של שני איברים, ומצאו קבוצת יוצרים עם שלושה איברים. האם $U_{40} \cong U_{48}$?

בהצלחה!