מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' דוד סרנה
תאריך: 2016-01-17

מבוא לתורת המשחקים
89-617-01

מכירות פומביות - המשך

שמספר הbibdderים עולה, ככה:

- תוחלת הרווח לauctioner עולה - כי הסיכוי שמקום שני יהיה גבוה גדל
- הsurplus יורד - כי ההפרש בין המקום הראשון לשני יורד

Coalitional Game Theory

נמדל משחקים שבהם מראש מוסכם שהשחקנים רוצים לשתף פעולה, והם צריכים להחליט כמה כל אחד תורם.

דוגמאות:
- זיר"ה - בעלי זכויות יוצרים שהתאגדו כדי לשמור על האינטרס המשותף - למרות שהם יריבים עסקיים
- פורום החברות הסלולאריות שעושה יחסי ציבור לכל החברות(למשל תגובות על המחאה נגד קרינה)
- ועד בית, שצריך לקדם תמ"א 38 וכל אחד מהדיירים רוצה להרוויח כמה שיותר

זה שאנשים פועלים ביחד לא אומר שהתרומה או המטרות שלהם זהות. יכול להיות שמישהו יכול לפרק את הקואליציה.

- אנחנו לא מנסים למדל כל אינדיווידואל, אלא מה הקבוצה תעשה ביחד.
- אנחנו מנסים למנוע את פירוק הקואליציה.
- אנחנו לא מסתכלים על הפעולות שקורות בתוך הקואליציה, אלא על ערך הקואליציה

הנחה

- הנחה חשובה היא שהתועלות ניתנות להעברה וחלוקה(transferable utilities)
  - אפשר לחלק מחדש בין חברי הקואליציה
  - אפשר לבטא את ערך הקואליציה במטבע כלשהו

הגדרה

משחק קואליציוני עם תועלת ניתנת להעברה היא זוג (N, v), כאשר:

N קבוצה סופית של שחקנים, מאונדקסת ע"י i

v פונקציה[1] $v : 2^N \mapsto \mathbb{R}$ שמשייכת לכל תת-קואליציה $S \subseteq N$ תמורה $v(S)$ שחברי הקואליציה יכולים לחלק ביניהם. מניחים ש$v(\emptyset) = 0$

הגדרה: סופר-אדיטיביות

משחק $G = (N, v)$ הוא סופר-אדיטיבי אם לכל $S, T \subseteq N$ מתקיים:

$$S \cap T = \emptyset \implies v(S \cup V) \geq v(S) + v(T)$$

[1] סוג של פונקציית תועלת

- הנחת הסופר־אדיטיביות ניתנת להצדקה בכל מקום שבו קואליציות יכולות לעבוד ביחד בלי להפריע אחת לשנייה
- כאשר יש סופר־אדיטיביות, איחוד של שתי קואליציות תמיד כדאי
- במצב כזה, הgrand-coalition(הקואליציה שכוללת את כל השחקנים) היא הבכרח זאת שתהיה לה התמורה הגדולה ביותר

לכן מכאן והילך נניח שהקואליציה היא grand-coalition, ונתמקד בחלוקה בתוך הקואליציה. נרצה שהחלוקה תהיה:

- הוגנת
- יציבה

הוגנות Fairness

לפני שמנסים למצוא חלוקה הוגנת, צריך קודם להחליט איך מגדירים הוגנות

The Shapley Value

הרעיון: החברים בקבוצה יחלקו ביניהם את ערך הקואליציה בצורה פרופורציונאלית לתרומה השולית שלהם(marinal contribution)

לתת לכל אחד בדיוק את התרומה שלו יכול להיות בעייתי, כי אם למשל צריך את כל חברי הקבוצה בשביל לקבל 1, ואם אחד חסר צריך 0, אז התרומה של כל חבר היא 1, אבל זה גם סה"כ הסכום לחלוקה.
לכן נרצה כלל שישקלל את התרומה ויתן תמורה פרופורציונאלית

האקסיומות של Shapley

- סימטריה: i וj יהיו חליפיים(interchangeable) בייחס לv אם תמיד יתרמו את אותו ערך לכל קואליציה של הסוכנים האחרים:

$$\forall_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}v\left(S\cup\{i\}\right)=v\left(S\cup\{j\}\right)$$

  נרצה תמיד לתת למשתתפים חליפיים את אותו הסכום/חלק:

$$i,j\text{ are interchangeable}\implies\psi_{i}\left(N,v\right)=\psi_{j}\left(N,v\right)$$

- Dummy Players: שחקן i יקרא Dummy Player אם תרומתו היא תמיד אפס:

$$\forall_{S}v\left(S\cup\{i\}\right)=v\left(S\right)$$

  משתתפים שהם Dummy Players תמיד יקבלו $\psi_{i}\left(N,v\right)=0$

  - מצד אחד מאוד אינטואיטיבי - כי אחרת עדיף לשחקנים האחרים להקים קואליציה בלי הDummy Players
  - מצד שני זה בעייתי(למשל זקנים שלא יכולים לתרום)

- אדיטיביות: אם היה אפשר לחלק את המשחק לשני חלקים, בכל אחד ערך משלו:

$$v=v_{1}+v_{2}\iff\forall_{S\subseteq N}v\left(S\right)=v_{1}\left(S\right)+v_{2}\left(S\right)$$

  אז אפשר לפרק באותה צורה גם את קביעת החלקים שיקבל כל סוכן:

$$\psi_{i}\left(N,v_{1}+v_{2}\right)=\psi_{i}\left(N,v_{1}\right)+\psi_{i}\left(N,v_{2}\right)$$

Shapley Value

מקיים את שלושת האקסיומות:

$$\phi_i\left(N,v\right)=\frac{1}{N!}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}|S|!\left(|N|-|S|-1\right)!\left[v\left(S\cup\{i\}\right)-v\left(S\right)\right]$$

הסבר: $N!$ כל האופציות לgrand coalition

$|S|!$ כל האופציות ליצירת הקואליציה S(בצורה סדרתית)

$(|N|-|S|-1)!$ כל האופציות להוספת שאר הסוכנים

כלומר, אנחנו מסתכלים על כל הסידורים האפשריים לייצור הgrand coalition, ומסתכלים על התועלת שמשתתף i מוסיף לקואליציה בשלב בו מוסיפים אותו בכל אחד מהשלבים.

משפט

בהינתן משחק קואליציה (N,v), קיימת חלוקת payoff יחידה $x\left(v\right)=\phi\left(N,v\right)$ שמחלקת את התמורה של הgrand coalition בצורה שמספקת את אקסיומות הסימטריה, הDummy Player והאדיטיביות, והיא הShapley Value.

יציבות

חלוקה היא יציבה אם אין אף תת־קואליציה שהתועלת שלה לבדה גדולה מהסכום של החלקים של חבריה בחלוקה.

The Core

סוכנים יסכימו להשתתף בgrand coalition אם ורק אם וקטור התשלומים יגיע מסט הנקרא Core.

הגדרה: וקטור תשלום x נמצא בcore של משחק קואליציה (N,v) אם ורק אם:

$$\forall_{S\subseteq N}\sum_{i\in S}x_i\geq v\left(S\right)$$

תכונות:

- סכום הpayoffים של השחקנים בכל סט S הוא לפחות מה שהיו יכולים להרוויח בקואליציה הנפרדת S(ביחד)
- אנלוגי לשיווי משקל נאש, אלא שכאן מדובר על סטייה של קבוצת סוכנים ולא של סוכן בודד
- חלוקה יכולה להיות בcore גם אם היא נותנת 0 לשחקנים שהם לא Dummy Player - למשל אם הם לא יכולים לקבל כלום במידה ויפרשו
- הcore יכול להיות ריק
- יכולה להיות יותר מחלוקה אחת שהיא בcore

הגדרה - Simple Games

משחק קואליציה $G=(N,v)$ הוא Simple Game אם

$$\forall_{S\subset N}v\left(S\right)\in\{0,1\}$$

הגדרה - Veto Player

שחקן הוא veto player אם $v\left(N\backslash\left\{ i\right\} \right)=0$

משפט

בsimple game הcore הוא ריק אם ורק אם אין שחקן וטו. אם יש שחקני וטו, הcore הוא כל וקטורי התשלום בהם השחקנים שאינם veto player מקבלים 0.

הגדרה - Convex Game

משחק $G=\left(N,v\right)$ הוא convex אם לכל $S,T\subset N$ מתקיים

$$v\left(S\cup T\right)\geq v\left(S\right)+v\left(T\right)-v\left(S\cap T\right)$$

כלומר, התמריץ להצטרף לקואליציה גדל ככל שהקואליציה גדלה.

משפט

לכל משחק convex יש core לא ריק

משפט

לכל משחק convex ערך הShapley נמצא בcore