1. הוכיחו את אי שוויון בסל: יהי V ממ"פ, תהי $\{x_1,...,x_n\}$ **קבוצה** אורתונורמלית ויהי x וקטור כלשהו, אז

$$\sum\left|\langle x, x_i\rangle\right|^2 \le \|x\|^2$$

2. השתמשו באי שוויון בסל כדי להוכיח את אי שוויון שוורץ: לכל $x,y\in V$,

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \le \|x\|\|y\|$$

3. מתי מתקיים **השוויון** של שוורץ? כלומר, עבור אילו וקטורים x,y נכון השוויון $\left|\langle x, y\rangle\right| = \|x\|\|y\|$? רמז: הוכיחו שהשוויון מתקיים אםם הוקטורים תלויים לינארית. רמז 2: הסתכלו על $\|\gamma x-\alpha y\|$ כאשר $\gamma\in C$ הוא כזה כך ש $\langle \gamma x, y\rangle\in R$ וכן $|\gamma|=1$ (עליכם להסביר למה קיים γ כזה).

4.

<u>הגדרה:</u> מטריצה A תקרא אוניטרית אם היא מקיימת $AA^t=I$ $(AA^*=)$.

4.13 תרגיל. א. יהיו E,F בסיסים אורתונורמלים עבור מרחב וקטורי V. הוכח שהמטריצה $P=[I]_F^E$ היא אוניטרית.

ב. תהא $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה אוניטרית. הוכח שקיים בסיס אורתונורמלי B כך ש $P=[I]_S^B$ (כאשר S הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^n$).

5.

4.13 תרגיל. מצא בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית $\langle a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2\rangle=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$. [ראו: תרג'ל קודם]

6.

יהי $\mathbb{R}_3[x]$ ממ"פ עם בסיס $\{1,x,x^2\}$. בנה בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{R}_3[x]$ ע"י תהליך גראם-שמידט כאשר המכפלה הפנימית מוגדרת:

א. $\langle p_1,p_2\rangle = 3a_1a_2+2b_1b_2+c_1c_2$ (כאשר $p_i=a_ix^2+b_ix+c_i$).

ב. $\langle p_1,p_2\rangle = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx$

7.

4.26 תרגיל. יהא $B=\{(i,i,0),(0,i,i),(i,0,i)\}$ בסיס עבור $\mathbb{C}^3$. מצא בסיס אורתונורמלי (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית) $B'=\{v_1',v_2',v_3'\}$, כך שמתקיים $\text{span}(v_1)=\text{span}(v_1')$ וכן $\text{span}(v_1,v_2)=\text{span}(v_1',v_2')$.