בוחן בדידה חורף תשעז

20/12/2016 כ׳ טבת

מתרגל: אחיה בר־און.

- ענו על כל השאלות.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. במידה והתשובות נכתבות במחברת בחינה, מספיק לכתוב ת.ז. ושם פעם אחת בעמוד הפותח.**
- הקפידו על סדר ניקיון. ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- מבנה הבחינה:
  - שאלת לוגיקה
  - שאלת קבוצות
  - שאלת יחסים
- הערה נא לקחת את מבנה הבחינה בעירבון מוגבל כיוון שקשה לסווג שאלה לנושא מסוים (שאלות יכולות לגעת בכמה נושאים).

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

1. [10 נק' לסעיף] הוכיחו או הפריכו:

(א) יהא p פסוק לוגי. נסמן ב D את צורת DNF שלו וב C את צורת CNF שלו. טענה: D שקול לוגית ל C.

פתרון: הוכחה: p שקול לוגית ל C. p גם שקול לוגית ל D ולכן C שקול לוגית ל D (במילים פשוטות $D \equiv p \equiv C$)

(ב) נגדיר קשר בינארי $*$ בעזרת הטבלא הבאה:

	A	B	$A * B$
1	FALSE	FALSE	TRUE
2	FALSE	TRUE	FALSE
3	TRUE	FALSE	TRUE
4	TRUE	TRUE	FALSE

אזי $\neg(A * B) \equiv B * A$.

פתרון: הפרכה: עבור $A = B = \text{FALSE}$ נקבל כי

$$\neg(A * B) = \neg\text{TRUE} = \text{FALSE}$$

ואילו

$$B * A = \text{TRUE}$$

(ג) כל קבוצת קשרים שלמה מכילה את $\neg$.

פתרון: הפרכה: למשל נור שראיתם בש.ב. הנקודות נור הוא קבוצת קשרים שלמה שלא מכילה את $\neg$

(ד) הפסוק הלוגי

$$\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$$

הוא טאוטולוגיה לכל פרדיקט $P(x,y)$ כאשר $x, y \in \mathbb{Z}$.

פתרון: הפרכה: $P(x,y)$ שמחזיר TRUE עבור $x < y$ מקיים כי:

- לכל מספר שלם x קיים y כך ש $P(x,y)$ - הוא פסוק ששקול לוגית ל TRUE כי לכל מספר מספר שלם x קיים מספר y שגדול ממנו
- קיים מספר שלם y כך שלכל x $P(x,y)$ - הוא פסוק ששקול לוגית ל FALSE כי אין מספר שלם שכל מספר שלם אחר קטן ממנו.

לכן הפסוק $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$ שקול לוגית ל FALSE עבור $P(x,y)$ הנ"ל.

(ה) הפסוק הלוגי

$$\forall x P(x,x) \to \forall x \exists y P(x,y)$$

הוא טאוטולוגיה לכל פרדיקט $P(x,y)$ כאשר $x, y \in \mathbb{Z}$.

פתרון: הוכחה: יהא $P(x,y)$ פרדיקט. נוכיח כי $\forall x P(x,x) \to \forall x \exists y P(x,y)$ טאוטולוגיה.

אם $\forall x P(x,x)$ מקבל ערך אמת FALSE אזי הפסוק $\forall x P(x,x) \to \forall x \exists y P(x,y)$ מקבל ערך אמת TRUE

אם $\forall x P(x,x)$ מקבל ערך אמת TRUE אזי גם $\forall x \exists y P(x,y)$ כי עבור לכל x קיים $y = x$ כך ש $P(x,y)$ ולכן הפסוק $\forall x P(x,x) \to \forall x \exists y P(x,y)$ מקבל ערך אמת TRUE

ומכאן שהפסוק $\forall x P(x,x) \to \forall x \exists y P(x,y)$ מקבל ערך אמת TRUE תמיד ולכן הוא טאוטולוגיה.

2. [15 נק' לסעיף]

(א) לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר קבוצה $A_n = \{2n, 3n, (-1)^n\}$. נגדיר

$$B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{2k}, \ \ C = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} A_{3t}$$

מצאו את $B\cap C$.

פתרון: נחשב

$$C=\bigcup_{t\in\mathbb{N}}A_{3t}=C=\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\left\{6t,9t,(-1)^{3t}\right\}=\{6t,9t,1,-1:\ t\in\mathbb{N}\}$$

$$B=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_{2k}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{4k,6k,(-1)^{2k}\right\}=\{4k,6k,1:\ k\in\mathbb{N}\}$$

טענה

$$B\cap C=\{6k,1:\ k\in\mathbb{N}\}$$

הוכחה בעזרת הכלה דו כיוונית:

($\supseteq$)הכלה ברורה

($\subseteq$)יהא $x\in B\cap C$ (נתעלם מהמקרה ש $x=1$ כי אם $x=1$ אז $x\in\{6k,1:\ k\in\mathbb{N}\}$ וסיימנו) אזי $x\in B\wedge x\in C$

כיוון ש $x\in B$ אזי קיים k טבעי כך ש $x=4k$ או $x=6k$

כיוון ש $x\in C$ אזי קיים t טבעי כך ש $x=6t$ או $x=9t$.

נבדוק את כל האפשריות:

אם $x=6k$ או $x=6t$ אזי $x\in\{6k,1:\ k\in\mathbb{N}\}$ וסיימנו

המקרה האחרון הוא $9t=x=4k$. ובקיצור $9t=4k$ כעת 2 מחלק את $4k$ ולכן גם את $9t$ כיוון ש 2ראשוני אזי הוא מחלק את 9 או את t. כיוון ש 2 לא מחלק את 9 הוא מחלק את t ולכן קיים t'טבעי כך ש $t=2t'$ ולכן

$$x=9t=18t'=6\cdot 3t'\in\{6k,1:\ k\in\mathbb{N}\}$$

(ב) הוכיחו כי לכל 2 קבוצות A,B מתקיים כי

$$.A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$$

פתרון: נחשב (כאשר המשלים פה מתייחס לקבוצה האויברסלית $U=A\cup B$)

$$A\setminus(A\setminus B)\overset{(1)}{=}A\cap(A\setminus B)^c\overset{(2)}{=}A\cap(A\cap B^c)^c\overset{(3)}{=}A\cap(A^c\cup(B^c)^c)\overset{(4)}{=}(A\cap A^c)\cup(A\cap B)\overset{(5)}{=}A\cap B$$

כאשר מסתמכים על (לכל שתי קבוצות C,D,E):

במעבר $(1),(2)$ על השיוון $C\setminus D=C\cap D^c$

במעבר (3) על דה מורגן $(C\cap D)^c=C^c\cup D^c$

במעבר (4) על פילוג $C\cap(D\cup E)=(C\cap D)\cup(C\cap E)$ + $(D^c)^c=D$

במעבר (5) כי $D\cap D^c=\emptyset$ + $E\cup\emptyset=E$

3. בשאלה זאת נסמן עבור קבוצה A את הגודל שלה ב - $|A|$, למשל $|\{1,5,-1\}|=3$.
תהא X קבוצה. נגדיר יחס $\sim$ על $P(X)$ כך: לכל $A,B\in P(X)$

$$[A\sim B]\iff[\exists k\in\mathbb{Z}:\ |A\triangle B|=2k]$$

במילים אחרות: $A\sim B$ אמ"מ בהפרש הסימטרי ביניהן יש מספר זוגי של איברים.

(א) [15 נק'] הוכיחו כי $\sim$ יחס שקילות על $P(X)$.

(ב) [5 נק'] עבור $X=\{1,2,3,4\}$ והיחס $\sim$ הנ"ל מצאו את מחלקת השקילות של $A=\{2\}$ כלומר מצאו את הקבוצה $[A]_\sim$.

פתרון: נבדוק לפי הגדרה:

$$[A]_\sim=\{B:\ \exists k\in\mathbb{Z}:\ |A\triangle B|=2k\}=\{\{2,i,j\}:\ i\neq j\in\{1,3,4\}\}\cup\{\{i\}:\ i\in\{1,3,4\}\}\cup\{\{1,3,4\}\}\cup\{A\}$$

$$=\left\{\ \{2,1,3\},\{2,1,4\},\{2,3,4\},\{1\},\{3\},\{4\}\ \{1,3,4\},\{2\}\ \right\}$$

(ג) [10 נק'] עבור $X=\{1,2,\ldots,n\}$ (עבור n טבעי כלשהוא גדול מ - 2) והיחס $\sim$ הנ"ל מצאו את גודל קבוצת המנה. כלומר מצאו את $|{}^{P(X)}/{\sim}|$.

פתרון: נראה כי $^{P(X)}/{\sim}=\{[\{1\}],[\emptyset]\}$ - אכן תהא $A\in P(X)$.

- אם $|A|$ זוגי אזי $A\sim\emptyset$
- אם $|A|$ אי זוגי:
  - אם $A\ni 1$ אזי $A\triangle\{1\}=A\setminus\{1\}$ ואז $A\sim\{1\}$ כי $A\setminus\{1\}$ זוגי
  - אם $1\notin A$ אזי $A\triangle\{1\}=A\cup\{1\}$ ואז $A\sim\{1\}$ כי $A\cup\{1\}$ זוגי

ולכן כל $A\in P(X)$ מתייחס ל $\{1\}$ או ל $\emptyset$. בנוסף $\emptyset$ לא מתייחס ל $\{1\}$ ולכן יש להם מחלקות שקילות שונות. ולכן

$$|{}^{P(X)}/{\sim}|=|\{[\{1\}],[\emptyset]\}|=2$$