תרגיל 2

16 באוגוסט 2017

1. תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות.
הוכיחו: $A_1 \triangle A_2 \triangle ... \triangle A_n = \{x | x \text{ in odd number of sets } A_i\}$. כלומר, קבוצת כל האיברים שנמצאים במס' אי־זוגי של קבוצות מתוך $A_1, A_2, ..., A_n$.

2. תהי $A \subseteq U$ קבוצה (U הקבוצה האוניברסלית לדיוננו). נגדיר סדרת קבוצות באופן רקורסיבי:

$$A_0 = A$$

$$\forall 0 < n \in \mathbb{N} : A_n = A_{n-1}^c \cup A$$

הוכיחו שלכל n אי־זוגי $A_n = U$, ולכל n זוגי $A_n = A$..

3. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

4. הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.
ב. $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$.
ג. $P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$.
ד. $P(A \triangle B) = P(A) \triangle P(B)$.

5. מצאו את צורת CNF ואת צורת DNF של הפסוק $p \wedge (q \to (r \vee p))$.

6. א. הוכיחו כי $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff [(a = c) \wedge (b = d)]$
הערה: זהו תרגיל המראה כי ניתן להגדיר זוג סדור ע"י קבוצות בלבד: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
הדרכה: אם יש שיוויון בין הקבוצות, לאיבר $\{a\}$ יש שתי אפשרויות מהו בקבוצה השנייה. הסיקו שבכל מקרה נקבל $a = c$. כעת לאיבר $\{a, b\} = \{c, b\}$ יש שתי אפשרויות. הסיקו משתיהן את השיוויון השני $b = d$.
ב. מצאו דוגמא כך ש: $\{\{a\}, b\} = \{\{c\}, d\}$ אבל **לא מתקיים** $[(a = c) \wedge (b = d)]$.
(כלומר, זו אינה הגדרה טובה לזוג סדור).

7. תהיינה A, B, C, D קבוצות. הוכיחו או הפריכו:
א. $(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(C\times D)$.
ב. $(A\cup C)\times(B\cup D)\subseteq(A\times B)\cup(C\times D)$.
ג. $(A\cup C)\times(B\cup D)\supseteq(A\times B)\cup(C\times D)$.
ד. אם $A=B$ אז $(A\triangle B)\times C=\phi$.
ה. אם $(A\triangle B)\times C=\phi$ אז $A=B$.

8. תהי A קבוצה. נגדיר יחס $R\subseteq P(A)\times P(A)$ ע"י:

$$\forall X,Y\in P(A): XRY \iff X\cap Y\neq\phi$$

הוכיחו או הפריכו:
א. R רפלקסיבי.
ב. R סימטרי.
ג. R טרנזיטיבי.

9. א. תהי A קבוצה ו־I קבוצת אינדקסים. נתבונן באוסף יחסים $\{R_i\}_{i\in I}$ על A. הוכיחו שאם לכל $i\in I$ היחס R_i הוא יחס שקילות אז היחס $R=\bigcap\limits_{i\in I}R_i$ הינו יחס שקילות.
ב. לכל $n\in\mathbb{N}$ נסמן $R_n=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: n|(x-y)\}$.
ידוע שלכל n R_n יחס שקילות, ומסעיף א נובע ש־ $R=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}R_n$ יחס שקילות. מצאו את קבוצות המנה: $\mathbb{Z}/R$, $\mathbb{Z}/R_1$, $\mathbb{Z}/R_2$?
ג. על הקבוצה $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ נגדיר שני יחסים, R,S, באופן הבא:

$$\forall(x,y),(z,w)\in A:(x,y)R(z,w)\iff x^2+y^2=z^2+w^2$$

$$\forall(x,y),(z,w)\in A:(x,y)S(z,w)\iff x=z$$

הראו ש R ו־S יחסי שקילות ומצאו את מחלקות השקילות: $[(0,1)]_{R\cap S}, [(0,1)]_S, [(0,1)]_R$.